2019年7月29日　5限　　科目　応用解析I・期末試験 (新規・再履)　　担任者　佐藤 尚次

都市　　試験時間は，佐藤尚次，姫野賢治両担当教員分に対して，17:00 ～ 18:30 の 90 分間

| 《持ち込み・参照物，注意事項》　＊必ずいずれかにチェックを入れてください. | 以下，必要な場合のみ○で囲んで下さい. |
|---|---|
| ☐ 持ち込み・参照一切不可 | 【　解答用紙別　／　計算用紙別　】 |
| ☑ 右のもののみ持ち込み・参照可 (指定の A4 版の自筆のメモ用紙 1 枚および電卓) | |
| ☑ その他 (　裏面あり　) | |

中央大学理工学部　1. 氏名等は黒または青のペンで記入のこと (鉛筆は無効). 2. 学生証は机上に提示のこと.

| 学籍コード | | | | | | | | | | | 氏　名 | 採点欄 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 入学年度 | | 学部 | 学科 | | 組 | | 号 | | | 検 | | |
| | | | | | | | | | | | | |

■すべての問題に解答すること.

【問 1】 (フーリエ級数解析)

＜おさらい＞関数 $f(x)$ が区間 $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ で定義されているとき，次の形で表現したもの

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (※)$$

をこの関数のフーリエ級数展開という．フーリエ係数 $a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$，$b_n (n = 1, 2, \cdots)$ は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

で表わされる．$f(x)$ がこれ以外の区間で定義されているときにも，それに対応した (※) の式の形と $a_n$，$b_n$ の公式を授業中に示した.

(1)

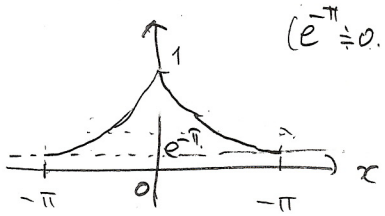
$$f(x) = e^{-|x|} \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

とする.

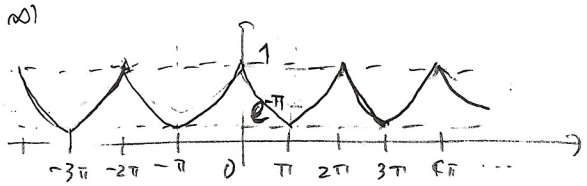
この関数を図示せよ．またこれらに対し，＜おさらい＞で示した式で，$a_n$，$b_n$ を求めたとする．これを，(※) の形に代入した右辺の関数は，形式的に $(-\infty < x < \infty)$ の $x$ に対して値を求めることができる．これはどういう図になるか．先の答と並べて図示せよ.

$f(x) = e^{-|x|}$
$(-\pi \leqq x \leqq \pi)$

$(e^{-\pi} \fallingdotseq 0.043)$




TOLD
$(-\infty \leqq x \leqq \infty)$




(2) この関数をフーリエ級数に展開して，(※) の形にして示せ.

ヒント：$f(x)$ が偶関数であることに気付くと計算は容易になる．また，三角関数の複素関数表示を利用するのも有効である．定義域での $f(x)$ の「平均値」はゼロではないので，その影響を計算に加えることも忘れずに.

$f(x)$ が偶関数であるので $b_n = 0$
$a_n$ のみ計算すればよい．$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(1 - e^{-\pi})$$

$a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cdot\cos nx\,dx$$

三角関数の複素関数表示をまり用すると

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \text{ となる.}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{e^{(-1+in)x} + e^{(-1-in)x}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in} + \frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{e^{(-1+in)\pi} - 1}{-1+in} + \frac{e^{(-1-in)\pi} - 1}{-1-in}\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[e^{-\pi}\left\{\frac{e^{in\pi}}{-1+in} + \frac{e^{-in\pi}}{-1-in}\right\} - \left\{\frac{1}{-1+in} + \frac{1}{-1-in}\right\}\right]$$

$\{\}$ 内を通分すると $= \dfrac{(-1-in)e^{in\pi} + (-1+in)e^{-in\pi}}{(-1+in)(-1-in)}$

$$= \frac{-(e^{in\pi} + e^{-in\pi}) - in(e^{in\pi} - e^{-in\pi})}{1+n^2}$$
$$= \frac{-2\cos n\pi + 2n\sin n\pi}{1+n^2}$$

$\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$

$$= \frac{-2(-1)^n}{1+n^2}$$

【問 1】(2) 解答欄続き

第2項の{ } $= \dfrac{(-1-in)+(-1+in)}{1+n^2}$

$= \dfrac{-2}{1+n^2}$

$\therefore a_n = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{-\pi}\right]$

よって(※)の形の表現は

$f(x) = e^{-|x|} \quad (-\pi \leqq 0 \leqq \pi)$

$= \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$= \dfrac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{[1-(-1)^n e^{-\pi}]\cos nx}{1+n^2}$

[問題文が誤って $\sum_{n=0}^{\infty}$ となっていたので、ここを $n=0$ としたものは正解扱いとします]

---

ちなみに、部分積分を2回繰返して $a_n$ は計算すると

$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\,dx$

$= \left[-e^{-x}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cdot n\sin nx\,dx$

$= (1-e^{-\pi}\cos n\pi) - n\left\{\left[-e^{-x}\sin nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} n\cos nx\,dx\right\}$

$= (1-e^{-\pi}\cos nx) - n e^{-\pi}\sin n\pi - n^2\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\,dx$

↓ $\cos nx = (-1)^n$, $\sin nx = 0$

$(1+n^2)\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\,dx = 1-(-1)^n e^{-\pi}$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{-\pi}\right] \quad (n=1,2,\cdots)$

これでやる方が楽(かつ普通か?)

【問 2】(フーリエ変換)

重たくて揺らすのが難しい「お寺の鐘」を，棒で撞くことによって鳴らすことが出来る．このことの物理的な意味づけを，「ディラックの $\delta$ 関数（単位衝撃関数）」のフーリエ変換を利用して，説明せよ．

ディラック(Dirac)の $\delta$ 関数

$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0) \end{cases}$

かつ $\int_{0-}^{0+} \delta(x)\,dx = 1$

$x \to t$ として時刻 $t=0$ に単位衝撃力が加わった状態のモデル化に用いられて

[この問題には関係ないが、構造力学の基本方程式もこの $\delta$ 関数で分布荷重の一種として位置づけられる]

このフーリエ変換は

$F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\cdot\delta(x)\,dx$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = \cos nx$ ($\omega$ によらない)

であり、これは

「$\delta(x)$, $\delta(t)$ で表わされる外力は、すべての(A)振動数成分を等しく含んでいる」

ことを意味している．

「お寺の鐘」を含めたすべての物体には固有振動数が存在し、その振動数で揺り立てられると共振現象を起こして振動する．

したがって「撞いて撞く」$= \delta(t)$ の形の外力をうることで、この外力のもつ「鐘の固有振動数」成分部分によって共振を加えた状態で鳴らすことができるのである．

↑

(授業中にこの通りの言葉で説明しました．)