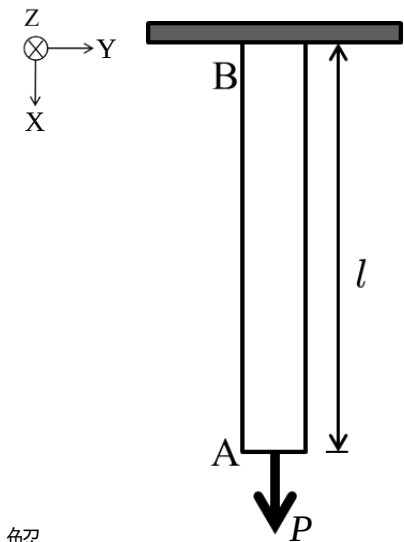


7.1

下図に示すように、断面積 A 、単位体積重量 γ_g 、ヤング係数 E 、長さ l の一端固定の棒のひずみエネルギーを次の場合について求めよ。



- (1) 自重のみによるひずみエネルギー
- (2) 先端Aに集中荷重 P が作用するとき、
 P のみによるひずみエネルギー
- (3) 先端Aの荷重 P と自重によるひずみエネルギー

解

全ひずみエネルギーは以下の式で求めることができる。

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma \varepsilon) dV + \frac{1}{2} \int_v (\tau \gamma_g) dV$$

この問題では構造物にせん断応力は作用しないので右辺第2項は0となる。また、

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

であるので

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx$$

となる。

(1) X座標を鉛直下向きにとると

$$N = Ax\gamma_g$$

であるので

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(Ax\gamma_g)^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{A^2 \gamma_g^2}{EA} \int_0^l x^2 dx \\ &= \frac{A \gamma_g^2 l^3}{6E} \end{aligned}$$

(2)集中荷重 P による軸力 N は

$$N = P$$

であるので

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2}{EA} dx = \frac{P^2 l}{2EA}$$

(3)同様に

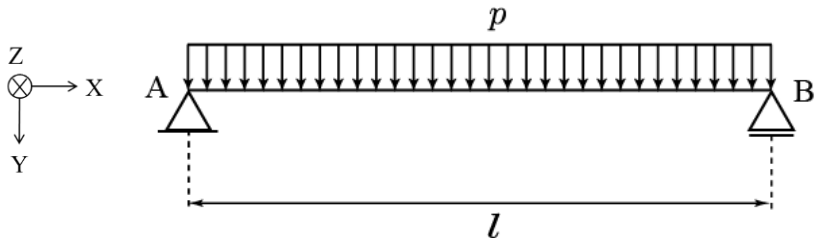
$$N = P + Ax\gamma_g$$

であるので

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(P + Ax\gamma_g)^2}{EA} dx \\ &= \frac{(P^2 l + \frac{A^2 \gamma_g^2 l^3}{3} + PA\gamma_g l^2)}{2EA} \end{aligned}$$

7.2

下図に示す単純ばりに等分布荷重 p が作用するとき、はりに蓄えられるひずみエネルギーを求めよ。



解

まず、全体のつり合いを考える。

$$\begin{aligned} \sum H = 0: H_A &= 0 \\ \sum V = 0: R_A + R_B - pl &= 0 \\ \sum M = 0: pl \times \frac{l}{2} - R_B l &= 0 \end{aligned}$$

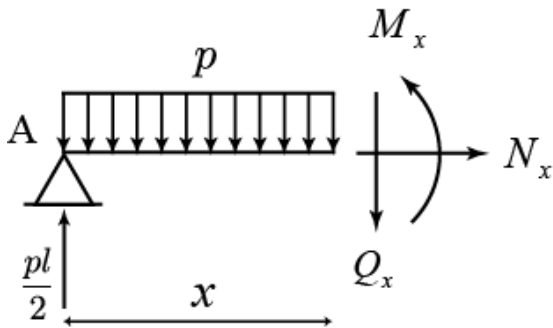
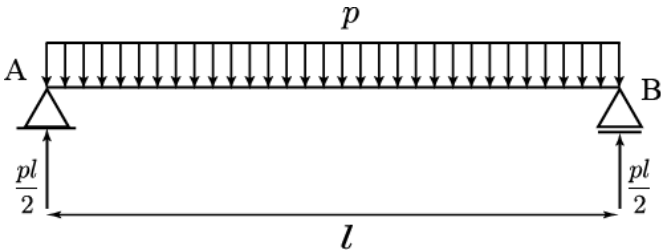
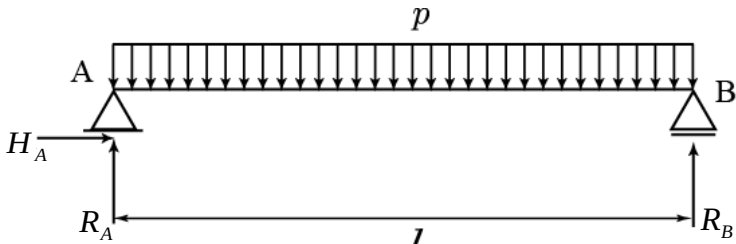
なので

$$R_A = \frac{pl}{2} \qquad R_B = \frac{pl}{2}$$

となる。

次にA-B間の断面力を求める。

$$\begin{aligned} \sum H = 0: N_x &= 0 \\ \sum V = 0: \frac{pl}{2} - px - Q_x &= 0 \\ \therefore Q_x &= -px + \frac{pl}{2} \\ \sum M = 0: -M_x - px \times \frac{x}{2} + \frac{pl}{2}x &= 0 \\ \therefore M_x &= -\frac{px^2}{2} + \frac{pl}{2}x \end{aligned}$$



よってひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= 0 + \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(-\frac{px^2}{2} + \frac{pl}{2}x\right)^2 dx + \kappa \frac{1}{2GA} \int_0^l \left(-px + \frac{pl}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{p^2x^4}{4} - \frac{p^2lx^3}{2} + \frac{p^2l^2x^2}{4}\right) dx + \kappa \frac{1}{2GA} \int_0^l \left(p^2x^2 - p^2lx + \frac{p^2l^2}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\frac{p^2x^5}{20} - \frac{p^2lx^4}{8} + \frac{p^2l^2x^3}{12} \right]_0^l + \kappa \frac{1}{2GA} \left[\frac{p^2x^3}{3} - \frac{p^2lx^2}{2} + \frac{p^2l^2x}{4} \right]_0^l \\ &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{p^2l^5}{20} - \frac{p^2l^5}{8} + \frac{p^2l^5}{12} \right) + \kappa \frac{1}{2GA} \left(\frac{p^2l^3}{3} - \frac{p^2l^3}{2} + \frac{p^2l^3}{4} \right) \\ &= \frac{p^2l^5}{240EI} + \frac{\kappa p^2l^3}{24GA} \end{aligned}$$