

問 1

図-1 に示すように、単純ばりの中央 C のたわみ δ_c を求め、曲げモーメントによるたわみ δ_M とせん断力によるたわみ δ_Q との比 δ_M/δ_Q を求めよ。

ただし、 $E=2.1 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ 、 $G=8.1 \times 10^6 \text{N/cm}^2$ 、 $\kappa=2.5$ とする。

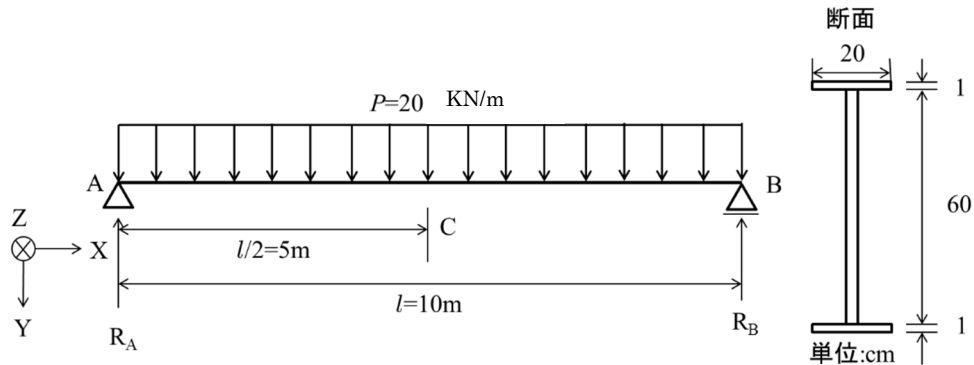


図-1

まず、断面積 A 、断面二次モーメント I を求める。

$$A = 20 \times 1 + 1 \times 60 + 20 \times 1 = 100 (\text{cm}^2)$$

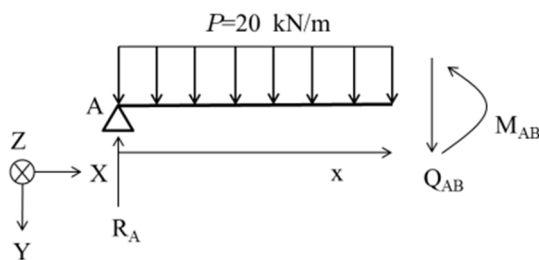
$$I = \frac{20 \times 62^3}{12} - 2 \frac{9.5 \times 60^3}{12} = 5.52 \times 10^4 (\text{cm}^4)$$

次に、実際の荷重が作用する曲げモーメントとせん断力と反力を求める。

反力は以下の通りになる。

$$R_A = R_B = \frac{pl}{2}$$

AC 間について



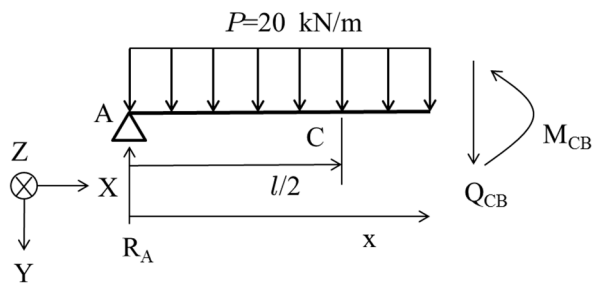
$$\sum M = 0$$

$$M_{AB} = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$$

$$\sum V = 0$$

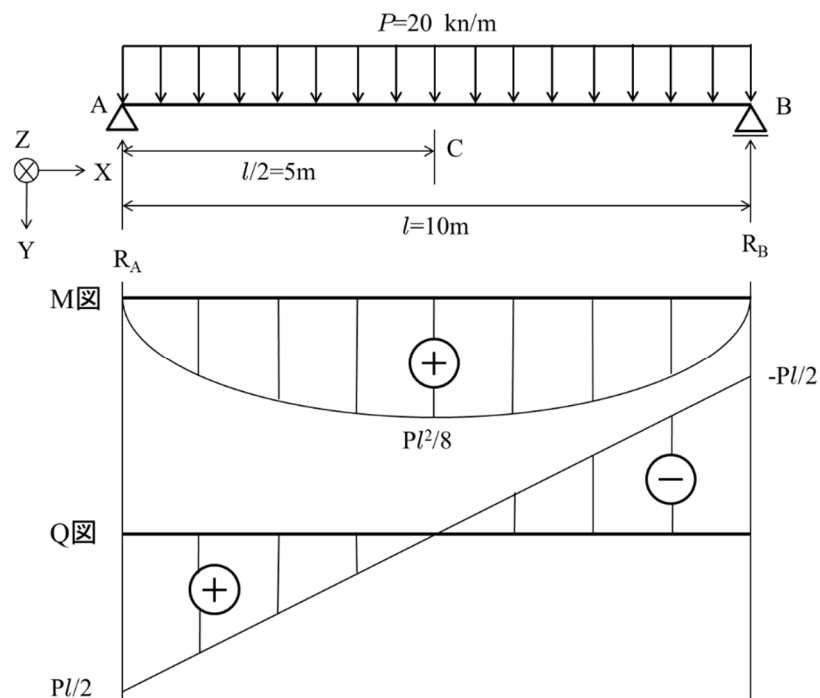
$$Q_{AB} = \frac{pl}{2} - px$$

CB 間について

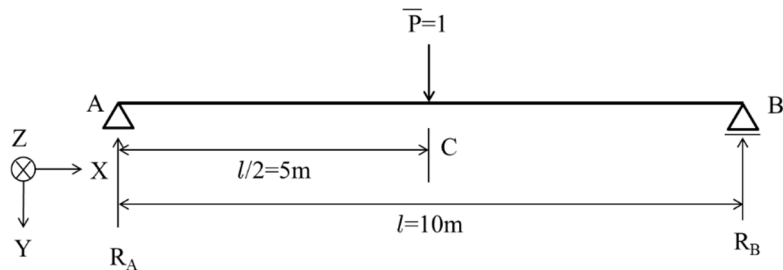


$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ M_{AB} &= \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2 \\ \sum V &= 0 \\ Q_{AB} &= \frac{pl}{2} - px\end{aligned}$$

モーメント図・せん断力図は以下の通り.

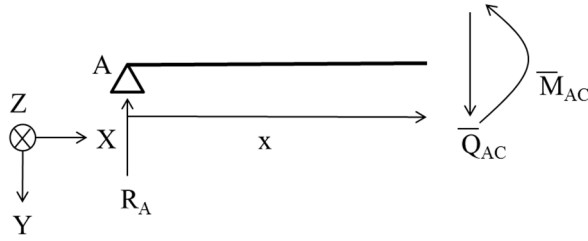


次に, 点 C の変位 δ_c を求めるために, 点 C に下図のように仮想荷重をかける.



$$R_A = R_B = \frac{1}{2}$$

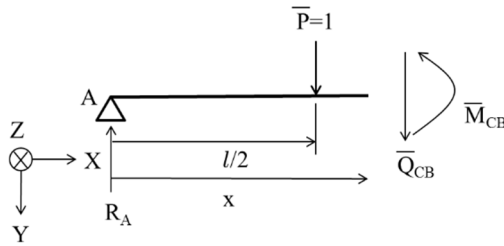
ここで，AC 間の力のつり合いを考える．



$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ \overline{M}_{AB} &= \frac{1}{2}x \\ \sum V &= 0 \\ \overline{Q}_{AB} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

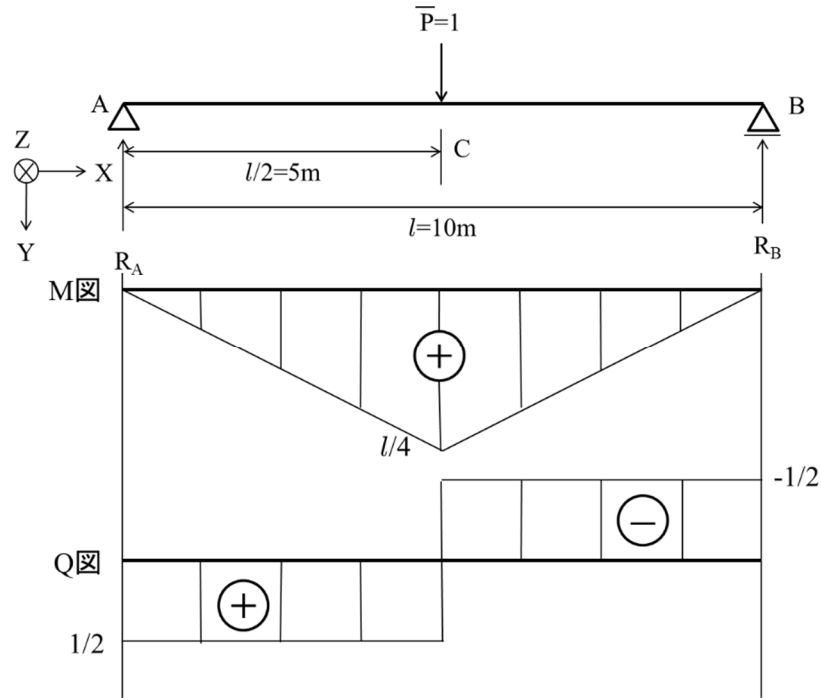
$$\begin{aligned}M_{AB} \overline{M}_{AB} &= \left(\frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2 \right) \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{4}px^2(l-x) \\ Q_{AB} \overline{Q}_{AB} &= \left(\frac{pl}{2} - px \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}p(l-2x)\end{aligned}$$

同様に，CB 間の力のつり合いを考える．



$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ \overline{M}_{CB} &= \frac{1}{2}x - \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2}(l-x) \\ \sum V &= 0 \\ \overline{Q}_{CB} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{CB} \overline{M}_{CB} &= \left(\frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2 \right) \frac{1}{2}(l-x) \\ &= \frac{1}{4}px(l-x)^2 \\ Q_{CB} \overline{Q}_{CB} &= \left(\frac{pl}{2} - px \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}p(l-2x)\end{aligned}$$



仮想仕事の原理より，変位は下式により与えられる．

$$\delta_H = \int_l \frac{N \bar{N}}{EA} dl + \int_l \frac{M \bar{M}}{EI} dl + \int_l \kappa \frac{Q \bar{Q}}{GA} dl$$

今回の問題においては，軸力が 0 である．まず曲げモーメントによるたわみ δ_M を求める．

$$\begin{aligned} \delta_M &= \int_l \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{AB} \bar{M}_{AB}}{EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{CB} \bar{M}_{CB}}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left\{ \frac{1}{4} px^2(l-x) \right\} dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{l}{2}}^l \left\{ \frac{1}{4} px(l-x)^2 \right\} dx \\ &= \frac{p}{4EI} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2(l-x) dx + \frac{p}{4EI} \int_{\frac{l}{2}}^l x(l-x)^2 dx \\ &= \frac{p}{4EI} \left[\frac{1}{3} lx^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{p}{4EI} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} lx^3 + \frac{1}{2} l^2 x^2 \right]_{\frac{l}{2}}^l \\ &= \frac{p}{4EI} \left\{ \frac{1}{3} l \left(\frac{l}{2} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^4 \right\} + \frac{p}{4EI} \left[\left\{ \frac{1}{4} l^4 - \frac{2}{3} ll^3 + \frac{1}{2} l^2 l^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^4 - \frac{2}{3} l \left(\frac{l}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right\} \right] \\ &= \frac{p}{4EI} \left(\frac{5}{192} l^4 \right) + \frac{p}{4EI} \left(\frac{5}{192} l^4 \right) \\ &= \frac{5pl^4}{384EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_M &= \frac{5pl^4}{384EI} \\
&= \frac{5}{384} \frac{200 \times 1000^4}{2.1 \times 10^7 \times 5.52 \times 10^4} \\
&= 2.247(cm)
\end{aligned}$$

同様に，せん断力によるたわみ δ_Q を求める．

$$\begin{aligned}
\delta_Q &= \int_l \kappa \frac{Q\bar{Q}}{GA} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \kappa \frac{Q_{AB}\bar{Q}_{AB}}{GA} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \kappa \frac{Q_{CB}\bar{Q}_{CB}}{GA} dx \\
&= \kappa \frac{1}{GA} \int_0^{\frac{l}{2}} \left\{ \frac{1}{4} p(l-2x) \right\} dx + \kappa \frac{1}{GA} \int_{\frac{l}{2}}^l \left\{ -\frac{1}{4} p(l-2x) \right\} dx \\
&= \kappa \frac{p}{4GA} \int_0^{\frac{l}{2}} (l-2x) dx + \kappa \frac{p}{4GA} \int_{\frac{l}{2}}^l (-l+2x) dx \\
&= \kappa \frac{p}{4GA} \left[lx - x^2 \right]_0^{\frac{l}{2}} + \kappa \frac{p}{4GA} \left[-lx + x^2 \right]_{\frac{l}{2}}^l \\
&= \kappa \frac{p}{4GA} \left(l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) + \kappa \frac{p}{4GA} \left\{ (-ll + l^2) - \left(-l \left(\frac{l}{2} \right) + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \right\} \\
&= \kappa \frac{p}{4GA} \left(\frac{1}{4} l^2 + \frac{1}{4} l^2 \right) \\
&= \kappa \frac{pl^2}{8GA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_Q &= \frac{pl^2}{8GA} \\
&= 2.5 \frac{1}{8} \frac{200 \times 1000^2}{8.1 \times 10^6 \times 100} \\
&= 0.0771(cm)
\end{aligned}$$

曲げモーメントによるたわみ δ_M とせん断力によるたわみ δ_Q との比 δ_M/δ_Q を求める．

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_M}{\delta_Q} &= \frac{2.247}{0.0771} \\
&= 29.1
\end{aligned}$$

単純ばりの中央 C のたわみ δ_c は

$$\begin{aligned}
\delta_c &= 2.247 + 0.0771 \\
&= 2.32(cm)
\end{aligned}$$