問 1

図- 1 に示す単純ばりの点 D のたわみδ_Dとたわみ角θ_Dを

カスティリアノの定理より求めよ．

ただし$E = 2.1 \times 10^7$ N/cm^2 （$= 2.1 \times 10^8 KN/m^2$），$I= 5.5 \times 10^4$ cm^4($= 5.5 \times 10^{-4} m^4$),

せん断力の影響を無視する．

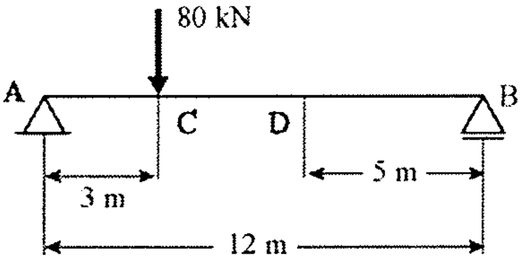
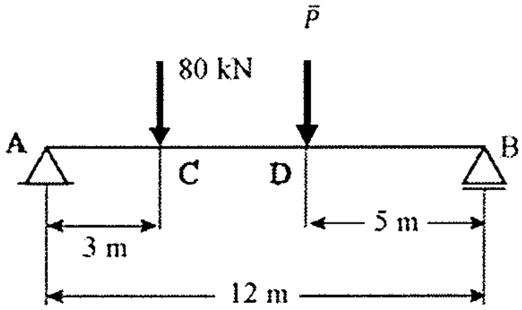
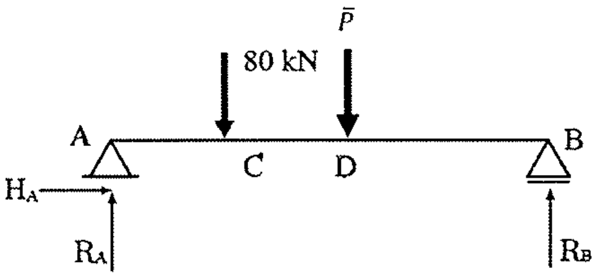


図- 1

解答） まず，点 D に下図のように仮想荷重($\bar{P}$)をかける．





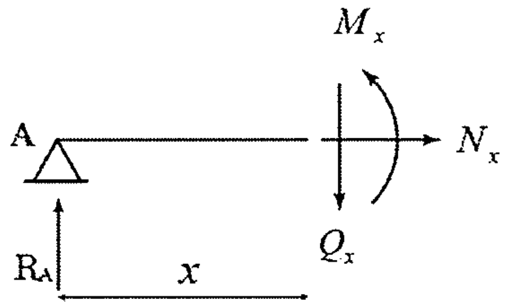
$$\sum H = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum V = 0: \quad R_A + R_B - 80 - \overline{P} = 0$$

$$\sum M = 0: 12R_B - 80 \times 3 - 7\overline{P} = 0$$

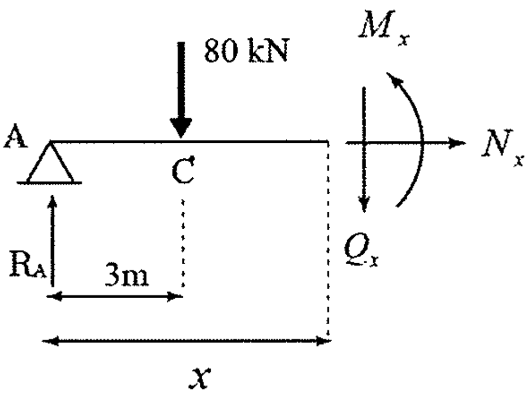
$$\therefore \quad R_B = \frac{7}{12}\overline{P} + 20 \quad R_A = \frac{5}{12}\overline{P} + 60$$

A－C 間の断面力



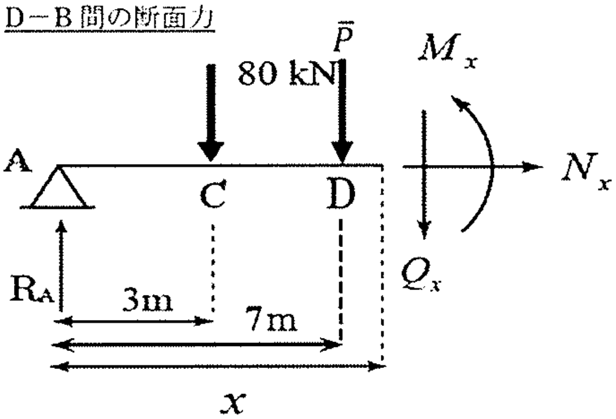
$$\sum H = 0: \quad N_x = 0$$
$$\sum V = 0: \quad R_A - Q_x = 0$$
$$\therefore \quad Q_x = R_A$$
$$\sum M = 0: \quad M_x - Q_x x = 0$$
$$\therefore \quad M_x = R_A x = \frac{5}{12}\overline{P}x + 60x$$
$$\rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial \overline{P}} = \frac{5}{12}x$$

C－D 間の断面力



$$\sum H = 0: \quad N_x = 0$$
$$\sum V = 0: \quad R_A - 80 - Q_x = 0$$
$$\therefore \quad Q_x = \frac{5}{12}\overline{P} - 20$$
$$\sum M = 0: \quad M_x - Q_x x - 80 \times 3 = 0$$
$$\therefore \quad M_x = \frac{5}{12}\overline{P}x - 20x + 240$$
$$\rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial \overline{P}} = \frac{5}{12}x$$

D－B 間の断面力



$$\sum H = 0: \quad N_x = 0$$
$$\sum V = 0: \quad R_A - 80 - \overline{P} - Q_x = 0$$
$$\therefore \quad Q_x = -\frac{7}{12}\overline{P} - 20$$
$$\sum M = 0: \quad M_x - Q_x x - 80 \times 3 - 7\overline{P} = 0$$
$$\therefore \quad M_x = -\frac{7}{12}\overline{P}x - 20x + 240 + 7\overline{P}$$
$$\rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial \overline{P}} = 7 - \frac{7}{12}x$$

カスティリアノの定理より，変位は下式により与えられる．

$$\delta_H = \int_l \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P_i}dl + \int_l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_i}dl + \int_l \kappa\frac{Q}{GA}\frac{\partial Q}{\partial P_i}dl$$

今回，せん断力の影響を無視するので，変位δ_Dは以下のようになる．

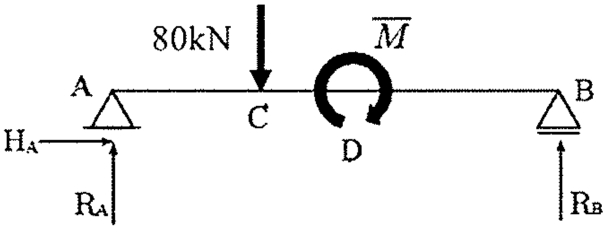
$$\begin{aligned}
\delta_D &= \int_l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \overline{P}}dl \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^3\left\{(\frac{5}{12}\overline{P}x + 60x)\cdot\frac{5}{12}x\right\}dx + \frac{1}{EI}\int_3^7\left\{(\frac{5}{12}\overline{P}x - 20x + 240)\cdot\frac{5}{12}x\right\}dx \\
&\qquad + \frac{1}{EI}\int_7^{12}\left\{(7\overline{P} + 240 - \frac{7}{12}\overline{P}x - 20x)\cdot(7 - \frac{7}{12}x)\right\}dx \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{25}{432}\overline{P}x^3 + \frac{25}{3}x^3\right]_0^3 + \frac{1}{EI}\left[\frac{25}{432}\overline{P}x^3 - \frac{25}{9}x^3 + 50x^2\right]_3^7 \\
&\qquad + \frac{1}{EI}\left[\frac{49}{432}\overline{P}x^3 - \frac{98}{24}\overline{P}x^2 + 49\overline{P}x + \frac{35}{9}x^3 - 140x^2 + 1680x\right]_7^{12}
\end{aligned}$$

しかし，$\bar{P}$は実際に点 D に作用する荷重ではないので，$\bar{P} = 0$となり

$$\delta_D = \frac{1}{EI}\left[\frac{25}{3}x^3\right]_0^3 + \frac{1}{EI}\left[-\frac{25}{9}x^3 + 50x^2\right]_3^7 + \frac{1}{EI}\left[\frac{35}{9}x^3 - 140x^2 + 1680x\right]_7^{12}$$

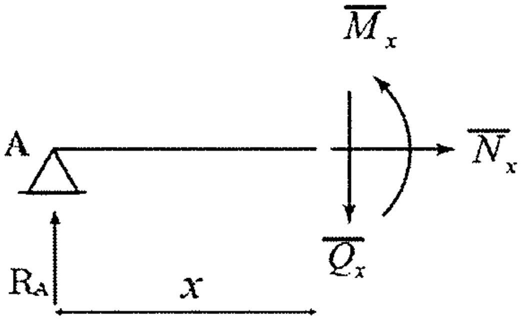
$$\therefore \quad \delta_D = 0.01587...[m] = 1.59[cm]$$

次に，点 D のたわみ角θ_Dを求めるために，点 D に下図のように仮想モーメント($\overline{M}$)をかける．



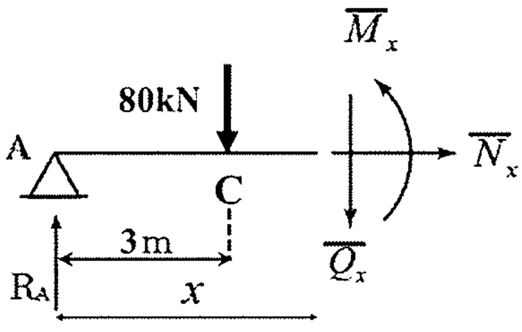
$$\sum H=0:\quad H_A=0$$
$$\sum V=0:\quad R_A+R_B-80=0$$
$$\sum M_A=0:\overline{M}-12R_B+3\times 80=0$$
$$\therefore\quad R_B=20+\frac{\overline{M}}{12},\quad R_A=60-\frac{\overline{M}}{12}$$

A－C 間の断面力



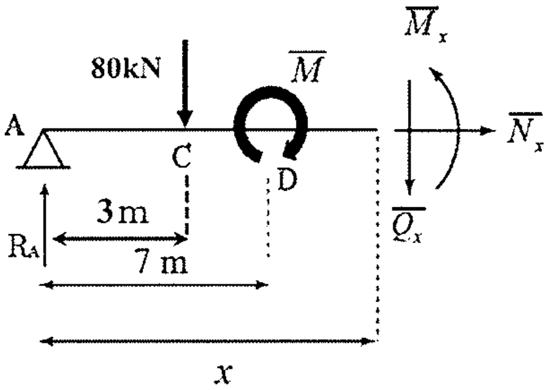
$$\sum H=0:\overline{N_x}=0$$
$$\sum V=0:R_A-\overline{Q_x}=0$$
$$\therefore\quad \overline{Q_x}=60-\frac{\overline{M}}{12}$$
$$\sum M=0:\overline{M_x}-\overline{Q_x}x=0$$
$$\therefore\quad \overline{M_x}=60x-\frac{\overline{M}}{12}x$$
$$\rightarrow\frac{\partial\overline{M}_x}{\partial\overline{M}}=-\frac{1}{12}x$$

C－D 間の断面力



$$\sum H=0:\overline{N_x}=0$$
$$\sum V=0:R_A-\overline{Q_x}-80=0$$
$$\therefore\quad \overline{Q_x}=-20-\frac{\overline{M}}{12}$$
$$\sum M=0:\overline{M_x}-\overline{Q_x}x-3\times 80=0$$
$$\therefore\quad \overline{M_x}=240-20x-\frac{\overline{M}}{12}x$$
$$\rightarrow\frac{\partial\overline{M}_x}{\partial\overline{M}}=-\frac{1}{12}x$$

D－B 間の断面力



$$\sum H = 0 : \overline{N_x} = 0$$

$$\sum V = 0 : R_A - \overline{Q_x} - 80 = 0$$

$$\therefore \quad \overline{Q_x} = -20 - \frac{\overline{M}}{12}$$

$$\sum M = 0 : -\overline{M} + \overline{M_x} - \overline{Q_x}x - 3\times 80 = 0$$

$$\therefore \quad \overline{M_x} = 240 - 20x - \frac{\overline{M}}{12}x + \overline{M}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \overline{M}_x}{\partial \overline{M}} = -\frac{1}{12}x + 1$$

カスティリアノの定理より，変位は下式により与えられる．

$$\theta_H = \int_l \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial M_i}dl + \int_l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i}dl + \int_l \kappa \frac{Q}{GA}\frac{\partial Q}{\partial M_i}dl$$

今回，せん断力の影響を無視するので，変位θ_Dは以下のようになる．

$$\theta_D = \int_l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \overline{M}}dl$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^3 \left\{(-\frac{\overline{M}}{12}x + 60x)\cdot(-\frac{1}{12}x)\right\}dx + \frac{1}{EI}\int_3^7 \left\{(-\frac{\overline{M}}{12}x - 20x + 240)\cdot(-\frac{1}{12}x)\right\}dx$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_7^{12}\left\{(\overline{M} - \frac{\overline{M}}{12}x + 240 - 20x)\cdot(1 - \frac{1}{12}x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{432}\overline{M}x^3 - \frac{5}{3}x^3\right]_0^3 + \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{432}\overline{M}x^3 + \frac{5}{9}x^3 - 10x^2\right]_3^7$$

$$+ \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{432}\overline{M}x^3 - \frac{1}{12}\overline{M}x^2 + \overline{M}x + \frac{5}{9}x^3 - 20x^2 + 240x\right]_7^{12}$$

しかし，$\overline{M}$は実際に点 D に作用する荷重ではないので，$\overline{M} = 0$となり

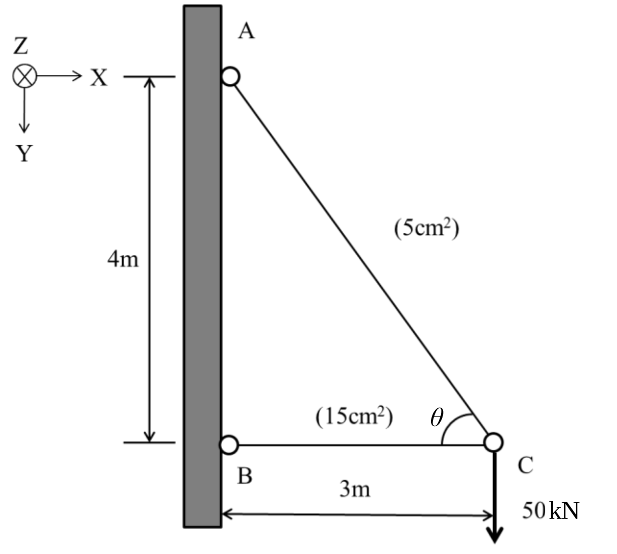
$$\theta_D = \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{3}x^3\right]_0^3 + \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{9}x^3 - 10x^2\right]_3^7 + \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{9}x^3 - 20x^2 + 240x\right]_7^{12}$$

$$\therefore \quad \theta_D = -1.731601\ldots\times 10^{-3} = -1.73\times 10^{-3}\,[rad]$$

(反時計方向の回転)

7.7

図に示すトラスの点Cの鉛直変位δ_Vを求めよ。ただし、部材の断面積はA_{AC}=5cm^2、A_{BC}=15cm^2、E=2.1×10^{7}N/cm^{2}とする。



解

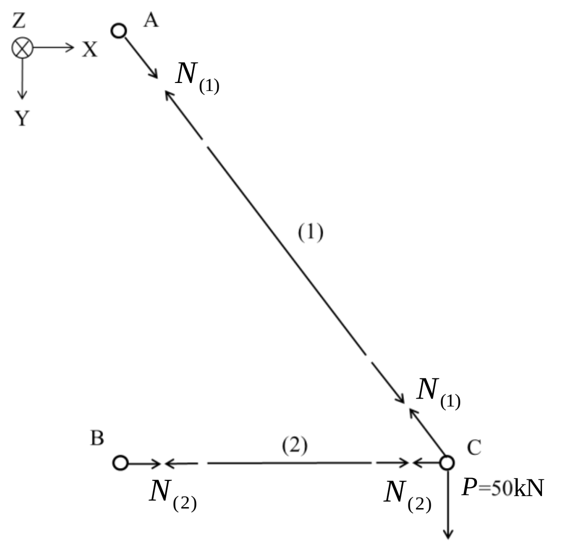
まず、sinθ、cosθを求める。

$$\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$$

次に、自由体図は右図のようになる。
ここで、C点における力のつり合いは

自由体図



$$\sum V = P - N_{(1)}\sin\theta = 0$$

$$N_{(1)} = \frac{P}{\sin\theta} = 62500\text{N}$$

$$\sum H = -N_{(1)}\cos\theta - N_{(2)} = 0$$

$$N_{(2)} = -N_{(1)}\cos\theta = -37500\text{N}$$

となる。鉛直方向に仮想荷重をかけた場合、

$$\bar{N}_{(1)}\sin\theta = 1$$

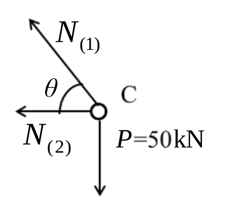
$$-\bar{N}_{(1)}\cos\theta - \bar{N}_{(2)} = 0$$

より

$$\bar{N}_{(1)} = \frac{5}{4}$$

$$\bar{N}_{(2)} = -\frac{3}{4}$$

C点周りの図

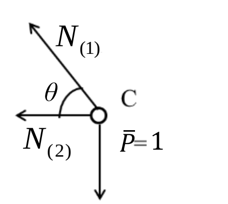


となり、よって鉛直変位は

$$\delta_V = \sum \frac{N_i\bar{N}_i}{EA}l = \frac{62500 \times 1.25 \times 500}{2.1 \times 10^7 \times 5} + \frac{37500 \times 0.75 \times 300}{2.1 \times 10^7 \times 15}$$

$$= 0.398\text{cm}$$

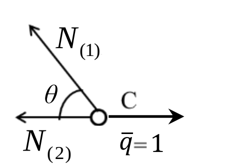
仮想荷重をかけた場合(鉛直方向)



次に水平変位S_Hを求めるため、
水平方向に仮想荷重をかける。

$$\bar{N}_{(2)} = 1$$

仮想荷重をかけた場合(水平方向)



となり、よって水平変位は

$$S_H = \sum \frac{N_i\bar{N}_i}{EA}l = -\frac{37500 \times 1 \times 300}{2.1 \times 10^7 \times 15}$$

$$= -0.036\text{cm}$$