

# 四分木構造格子による局所的な高解像度格子を導入した浅水流方程式の数値解析法

COMPUTATION OF SHALLOW WATER EQUATION  
WITH HIERARCHICAL QUADTREE GRID SYSTEM

安田浩保<sup>1</sup>・星野剛<sup>2</sup>

Hiroyasu YASUDA and Tsuyoshi HOSHINO

<sup>1</sup> 正会員 工博 新潟大学准教授 災害・復興科学研究所 (〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐2の町8050)  
<sup>2</sup> 学生員 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐2の町8050)

Numerical computation of river flows have been employed the general coordinate system to adjust a river plane form. An adjustment flexibility of the coordinate system is better but it is difficult to generate a grid system in order to compute stably because grid system is not determined uniquely. This study develops a new boundary fitting method introducing the hierarchical quad-tree grid system in computation of shallow water equation. The numerical model with the quad-tree grid system apply to compute flow pattern in meandering channel, the result agree with experiments result well.

**Key Words:** quad-tree grid system, numerical model, meandering channel, shallow water equation

## 1. はじめに

河道の流況解析や河床変動解析においては、最低位の条件として河道の平面形状を忠実に表現することが要求される。この要求に対し、構造格子型と非構造格子型の二つに大別される様々な境界適合の手法がこれまでに提案されてきた。水工学の分野における構造格子型の先駆的な取り組みとしては、清水<sup>1)</sup>による一般座標を導入した計算方法が挙げられよう。一般座標の格子構成では、横断形状の測線を平面的に配置して得られる幾何形状を基本的な格子構成とすることが多い。こうして得られる格子構成は広範な柔軟性を有し、数値解析の適用範囲を飛躍的に拡張することに大きく貢献してきた。その一方で、河道の湾曲部の曲率が大きい場合や、分岐・合流を繰り返すような場合では、単一座標系の構造格子型の宿命で境界適合のために生じる格子構成の歪曲が境界適合と無関係の計算領域の内部にまで及び、座標変換が要求するマトリクスの連続性を満足することができず、計算の精度や安定性の低下の大きな要因となる。このような歪曲を緩和するための最適化手法が提案されているものの、一般座標の格子構成パターンは無限のため、適切な解析を可能とする格子構成を得るまでに相当な試行錯誤が必要となる。最近では、内田・河原<sup>2)</sup>や安田・清水<sup>3)</sup>が直交座標系を基本としながら幾何学的な工夫を凝らして巧妙に境界適合する方法を提案している。彼らの方法は重合格子法<sup>4)</sup>の一種といえ、格子構成が一意に決定されるところに格子構成上の優位性を持つ。非構造格子型の計算方

法については、前野・小川<sup>4)</sup>や秋山ら<sup>5)</sup>などが有限体積法と流束差分法に基づく手法を提案して、解析精度と境界適合の汎用性が高いことを示している。これらの計算方法を解析対象に応じて使い分けたり組み合わせることで水工学分野において求められる境界適合はおおむね満足されつつある。近年、レーザーや超音波などのセンサ技術を活用した計測手法が急速に発達して、氾濫原、河道の平面形状および河床形状が高解像度の面的情報として取得されるようになってきた。すなわち、河道内地形の起伏を忠実に捕捉した情報に基づく水理解析を実現できる段階にまで計測技術が進展してきている。時空間の離散間隔が解析の精度とコストに密接に関係する数値計算の特性を踏まえると、このような面的情報の効率的な活用とは、格子構成において必要領域のみ局所的に地形情報を高解像で表現されることがひとつの理想形と言えよう。しかし、一般座標のような単一座標系に基づく境界適合法において高解像度情報を解析に組み込むためには、解析の対象領域の全体を一様に細密化した格子構成を用いざるを得ず、格子数の増大に伴う計算効率の著しい低下は不可避である。本研究では、近い将来に数値的な水理解析の基礎情報の主流となると考えられる高解像度の面的情報を四分木構造に基づく構造格子型計算法において効率的に活用するための格子構成法およびこれに基づく数値計算法について論じる。すでに、境界適合<sup>6)</sup>や物理量の急変点の解像度の向上のため<sup>7)</sup>に重合格子の一種である四分木構造格子を導入した解析手法が報告されている。これらに対し、本研究は、高解像度の

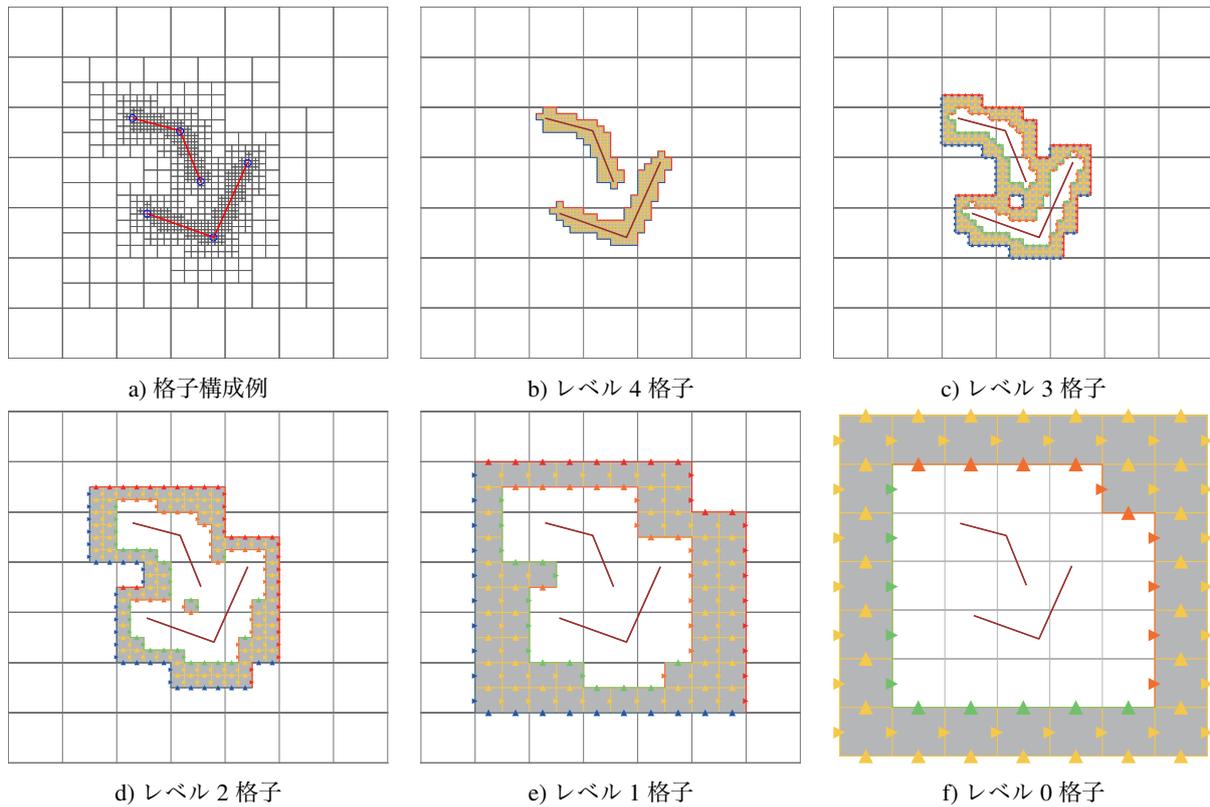


図-1 四分木格子による幾何表現と水理解析のための計算点配置とレベル間の接続関係

面的な地理情報の数値水理解析への適用を見据え、境界適合に対して四分木構造格子を適用するにとどまらず、地形急変部などの必要領域だけに限定した局所的な高解像度化を試み、これらがもたらす格子構成の柔軟性、解析の効率性、計算精度について示す。

## 2. 四分木構造に基づく格子構成法

### (1) 四分木構造格子による幾何形状の表現

四分木構造とは2次元空間を再帰的に4つに分割した構造を指し、空間情報の観点では局所的に解像度を増減させることが可能な柔軟かつ効率的なデータ構造である。換言すると、構造的な分割規則に基づき格子面積が規定された多層の格子層の重ね合わせ構造と言える。

図-1 a) に四分木構造格子を用いて赤線で示された幾何形状を高解像度に表現した一例を示した。この図の例では、最も格子面積が大きいものを基準として、格子面積を  $1/4^1$ ,  $1/4^2$ ,  $1/4^3$ ,  $1/4^4$ , と順に小さくした合計で5種類の大きさの格子を用いて幾何形状を表現している。この表記に従うと格子面積が最大のものは  $1/4^0$  と書ける。以降、本論文ではべき乗の値を  $L$  とし、各格子面積レベルをレベル0などと表記する。

各レベルでの格子数はこの例の場合では、レベル0から4の順に34, 85, 140, 320, 662個の格子が用いられている。この領域例をすべてレベル4の格子で覆

うと格子数は12000程度となり、レベル0から4の格子を組合せた格子構成時の格子総数は10%以下にまで縮減されていることになる。この格子数の縮減の傾向は計算対象領域が広がるほどに一層顕著となる。

同図に示したように、一見すると四分木構造格子を用いた幾何形状の表現方法は複雑に思えるが、隣接する格子面積レベルは同一か±1の大きさの3パターンしか存在せず、格子構成は非常に規則的である。この規則性の高さから四分木構造を導入した格子生成は容易であり、本研究では格子生成の自動化手法を確立した。また、規則性が高いにも関わらず、格子構成は柔軟かつ効率的に行え、複雑な形状をした計算領域の境界適合、線状の内部境界などの表現、局所的な解像度の向上などが可能である。本論文では、特に、境界形状および局所的な高解像度化に焦点を絞った議論を展開する。

### (2) 自動構成法の概要

水理解析において四分木構造に基づく格子構成を導入するためには、(1) 四分木構造格子の生成、(2) 格子面積レベル間の接続関係の定義、(3) 各格子面積レベル毎の標高情報、以上3つについてあらかじめ準備する必要がある。四分木構造型の格子構成により広範な問題を解析していくことを考えると、計算機を用いるなどして自動的に生成されることが望ましい。本研究では、できるだけ簡便かつ少量の入力情報のみから四分木構造格子群を自動生成する方法を以下に考案した。

考案した自動生成法の入力情報は、境界適合や局所的高解像度化を実施する位置指定の座標値あるいは境界などを表す線分を構成する座標値、計算領域を定義するための座標値、レベル0の格子長、レベル0格子の分割階層数のみである。これらのわずかな入力情報だけから以下のすべての処理を実行可能なように設計した。なお、以下で論じる格子構成の手順は、スタaggerド格子を用いた2次元計算のための計算格子の生成を前提としている。

#### a) 四分木構造で構成された格子層の自動生成

まず、格子面積が最小のレベル  $L$  の格子層と入力された一連の線分座標との交点座標を求める。次に、求められた交点座標を包含するレベル  $L$  の格子を計算格子とし、この計算格子を包含する  $L-1$  の格子を検索する。この  $L-1$  層の格子に内包される  $L$  層内の格子を計算格子とし、このような検索を格子面積が最小のレベル  $L$  からレベル0の格子層の順に行う。このような検索規則を適用して得られた格子構成と各格子面積レベルごとの格子群が図-1 b) から f) である。この検索処理は、各格子面積レベルの水理解析において明示的に用いられる格子の選別を行ったことを意味する。

#### b) 格子面積レベル間の接続関係と計算順序

前項で行った検索処理は、スタaggerド格子の観点から見れば、各格子層の水位計算点を定義したことと同義である。四分木格子構造による水理解析を行うためには、この水位計算点の定義に加え、流速計算点の定義とそれらの種別判定が必要となる。この種別判定は、格子層の接合面における水理量の授受や境界条件の設定を簡便にするために不可欠な処理である。

図-1 の b) から f) に示した三角点は流速計算点を示しており、ここではこの三角点の種別の判定および計算処理について説明する。図中の b) から f) を見ると格子面積が最小となる格子層を除いて各層はドーナツ状の中空形状をしている。各レベルの格子層は図中の青線と赤線で示した外周では自身よりも格子面積がひとつ大きな格子層と、緑線と橙線で示された内周では自身よりも格子面積が小さい格子層と接合される関係にある。また、外周と内周の間に位置する同一レベルの格子接続部を黄線で示した。この関係性に着目すると、スタaggerド配置される計算点はこれらの線分上に位置する黄色、青色、橙色、赤色、緑色に着色された5種類に分類されることが分かる。このうち支配方程式から算出される計算点は黄色、青色、橙色の3種類である。赤色と緑色の計算点は移流項の計算に要する情報であり、異なるレベルにおいて支配方程式から算出された値から求める。

まず、黄色の計算点は外周や内周に関わらず計算領域内部の計算点として取り扱え、境界条件を課すことなく支配方程式から算出される。

レベル  $L$  の外周上に配置された青色の計算点は、ひとつ外周側に位置するレベル  $L-1$  の計算済の水位を境

界条件として支配方程式から算出される。同様にレベル  $L$  の内周上に配置された橙色の計算点は、ひとつ内周側に位置するレベル  $L+1$  の計算済の水位を算術平均することによりレベル  $L$  の境界条件として支配方程式から算出される。

レベル  $L$  の赤色の計算点は支配方程式からでなく、レベル  $L-1$  の計算済みの値をもたせる。この処理手順はレベル  $L$  の赤色の計算点がレベル  $L-1$  の橙色の計算点と空間的に重複していることに着目した。  $(i, j)$  を水平方向と鉛直方向の任意の格子番号とすると、この重複は水平方向の計算点においては、レベル  $L$  の赤線上の2つの計算点  $(i, j), (i, j-1)$  とレベル  $L-1$  の橙色の計算点  $(i/2, j/2)$  でみられ、鉛直方向の計算点ではレベル  $L$  の赤線上の2つの計算点  $(i-1, j), (i, j)$  とレベル  $L-1$  の橙色の計算点  $(i/2, j/2)$  でみられる。ここでの計算手続きは対応する格子番号にレベル  $L-1$  からレベル  $L$  へと値を渡すことで行われる。この関係は水平方向では以下の式 (1), (2) で示される。

$$f_{x,L}(i, j) = f_{x,L-1}(i/2, j/2) \quad (1)$$

$$f_{x,L}(i, j-1) = f_{x,L-1}(i/2, j/2) \quad (2)$$

同様に鉛直方向では式 (3), (4) として示される。

$$f_{y,L}(i, j) = f_{y,L-1}(i/2, j/2) \quad (3)$$

$$f_{y,L}(i-1, j) = f_{y,L-1}(i/2, j/2) \quad (4)$$

ここに、 $f_{x,L}, f_{y,L}$  はレベル  $L$  でのそれぞれ水平方向、鉛直方向の任意の物理量である。

レベル  $L$  の緑色の計算点は、青色に着色されたレベル  $L+1$  の2つの計算点と空間的に重複している。この対応関係は水平方向ではレベル  $L$  の  $(i, j)$  はレベル  $L+1$  の  $(2i, 2j)(2i, 2j-1)$  の2点、鉛直方向ではレベル  $L$  の  $(i, j)$  はレベル  $L+1$  の  $(2i, 2j)(2i-1, 2j)$  の2点にある。このことから緑色の計算点の値は支配方程式からではなく、次の式で示した算術平均により求めた。水平方向と鉛直方向の算術平均をそれぞれ以下の式 (5), (6) に示した。

$$f_{x,L}(i, j) = (f_{x,L+1}(2i, 2j) + f_{x,L+1}(2i, 2j-1))/2 \quad (5)$$

$$f_{y,L}(i, j) = (f_{y,L+1}(2i, 2j) + f_{y,L+1}(2i-1, 2j))/2 \quad (6)$$

前述までの格子面積レベルの接合関係を踏まえると、支配方程式による計算は各格子面積レベルごとに行えばよく、格子面積レベルの計算順序は0から  $L$  に向かって行う。支配方程式の計算後には次の時間ステップにおける移流項の計算のために赤色と緑色の計算点の値を求めることで適切な境界条件を課した計算となる。つまり、異なる格子面積間の接続手続きは、四分木構造格子においては同一の座標系であるため、直交座標系と極座標を組み合わせるような重合格子と比べると非常に容易である。

なお、これまでに示した四分木構造格子の数値計算の手順および後述の支配方程式において、等流計算、不等流計算を試験的に行い、理論値の十分な再現性と算出された物理量の連続性は確認できた。このことから四分木構造格子における計算手続きはこれまでに説明した手法で記述できるものと判断できる。

### c) 各格子面積レベル毎の標高情報の生成

一般座標を初めとする多くの構造格子では格子層は一層だけで良いため、それぞれの計算点に標高値を与えることは容易である。一方で、四分木格子に基づく構造格子は多層的なため、格子面積レベルごとに解像度の異なる標高値を準備する必要がある。入力ソースとして面的な計測結果を利用できる場合ではそれほど煩雑な処理は要求されない。しかし、入力ソースが横断測量や等水深線などの不規則な離散情報の場合、これらに対して何らかの補間処理を施して面的情報を生成する必要がある。この詳細については、後述の室内実験水路の再現計算の章において詳述する。

## 3. 数値計算法

### (1) 支配方程式

各面積レベルの格子層の座標系は直交直線座標系で記述される。それぞれの層内における  $x, y$  方向の流量フラックス、水位は以下の式 (7) から (9) の浅水流方程式により計算される。また、式 (8), (9) で用いる  $\tau_{xb}, \tau_{yb}$  は、式 (10), (11) により算出した。

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial M_k}{\partial x_k} + \frac{\partial N_k}{\partial y_k} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{M_k^2}{h_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{M_k N_k}{h_k} \right) + g h_k \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = -\frac{\tau_{xb}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu_i \frac{\partial M_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \nu_i \frac{\partial M_k}{\partial y_k} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{M_k N_k}{h_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \frac{N_k^2}{h_k} \right) + g h_k \frac{\partial H_k}{\partial y_k} = -\frac{\tau_{yb}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu_i \frac{\partial N_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \nu_i \frac{\partial N_k}{\partial y_k} \right) \quad (9)$$

$$\tau_{xb} = \frac{\rho g n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \quad (10)$$

$$\tau_{yb} = \frac{\rho g n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \quad (11)$$

ここで、 $M, N$  は  $x, y$  方向の流量フラックス、 $t$  は時間座標、 $x, y$  は平面座標、 $h$  は水深、 $g$  は重力加速度、 $H$  は水位、 $\tau_{xb}, \tau_{yb}$  は  $x, y$  方向の底面せん断応力、 $u, v$  は  $x, y$  方向の流速、 $\rho$  は水の密度、 $\nu_i$  は渦動粘性係数、それぞれの変数に下添えされた  $k$  は格子面積レベルである。

一般座標の支配方程式は四分木構造格子の支配方程

表-1 水理実験の諸条件

$\tilde{L}$	$\tilde{B}$	$\theta_0$	bed gradient	$Q$
220cm	30cm	30°	0.00333	1.87l/s

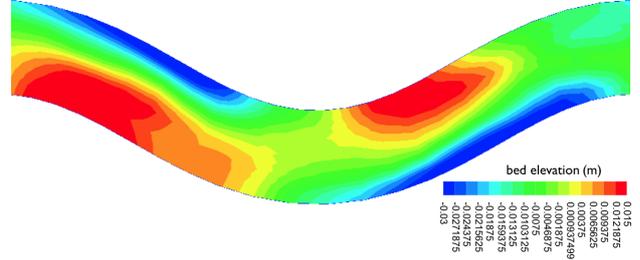


図-2 流路形状

式に座標変換に伴う付加項が加わる。両支配方程式は物理的には厳密に一致するものの、格子構成の歪曲が大きい場合などでは、一般座標ではこの座標変換が要求するマトリクスの連続性が満足されず、計算精度の低下の要因となることがある。

### (2) 数値計算法

これらの式の数値計算は、連続の式、運動の式ともにスタッガード格子に基づく2次精度のLeap-Frog法を適用した。

## 4. 流路蛇行に関する水理実験の再現計算

本研究において新たに開発された流況解析法の妥当性を検証するために実現象との比較を行う。ここでは、河川の本来の特徴である蛇行部における流況の面的な特性を把握することを目的に、以下に示した蛇行流路に対する室内実験を比較対象とした。

### (1) 水理実験の概要

長谷川ら<sup>8),9),10)</sup>は、蛇行流路における流れの性質を調べることを目的に蛇行流路の移動床実験を行った。彼らは、式 (12) で表現される sine-generated curve の形状から成る水路を用いて種々の条件で実験を行った。

$$\theta = -\theta_0 \sin \frac{2\pi}{\tilde{L}} \tilde{s} \quad (12)$$

本研究では、このうち、表-1に示したME-2と呼ばれる実験の再現計算を行うことにした。ここに、 $\tilde{L}$ は蛇行長、 $\tilde{B}$ は流路幅、 $\theta_0$ は蛇行角、また、同表中の $Q$ は上流端から供給する定常流量である。彼らによると、表-1

の条件のもとで実験を実施した結果、実験開始から 240 分後に定常状態に達し、その時刻における河床形状が 図-2 である。

本研究では、四分木構造格子の計算特性を評価するために、この水理実験の再現計算を行った。四分木構造格子、一般座標系のいずれの再現計算に対してもこの定常状態における河床形状を固定床として与えた。

なお一般座標系による計算にはフリーソフトである RIC-Nays<sup>11)</sup> を用いた。

## (2) 計算格子

図-2 に示した水路を四分木構造格子、一般座標系のそれぞれで数値計算するにあたり、計算格子を 図-3 (a), (b), (c) に示す通り設定した。

図-3 (a) に示した四分木構造の計算格子は、基本となるレベル 0 の格子を水平方向、鉛直方向ともに 5cm の正方格子に設定した。境界部における最小格子はレベル 3 に設定し、辺長 0.625cm の格子で境界部を表現している。この格子構成での各レベルの格子数を合計すると 9928 個であり、すべての格子を最小格子に設定した場合の格子数は 65280 個である。つまり四分木構造の導入により格子数をすべて最小格子とした場合から 84.8% 縮減されたことになる。本論文ではこの値を格子数縮減率と呼ぶこととし、この値が大きいほど空間の計算点数の効率化が施されたことになる。

図-3 (b) は 図-3 (a) の計算格子に水路内の砂州や深掘れ部の鉛直起伏を忠実に計算へと反映するために、起伏変化の大きい箇所を線分として与え、前述の格子構成法に基づき格子分割を行った計算格子である。本研究ではこの線分を内部分割線と呼ぶこととする。この格子構成では 77.5% の格子数縮減率を示した。内部分割線を導入するほど最小格子は増加し、それに伴い格子数縮減率は低下していくが、 図-3 (b) に示す程度の内部分割では格子数縮減率は 10% 以下の低下を示した。このことから内部分割線を導入した際にも空間的な計算点の縮減には十分貢献することがわかる。

一方で、比較対象のために行った一般座標系の計算では 図-3 (c) に示した計算格子を用いた。これは実験水路を流下方向に 68 分割、横断方向に 30 分割したもので、この横断方向の分割数は 図-3 (a), (b) に示したレベル 2 と同程度とし、四分木構造格子と一般座標系で基本解像度を統一している。

## (3) 初期条件・境界条件

本研究では、河床のせん断力の評価は安田・清水<sup>3)</sup>と同様に黒木ら<sup>12)</sup>により提案された式を用い、実験結果として示されている平均流速と平均水深を与えて河床の抵抗係数  $C_d$  を 0.007 と求めた。このとき、摩擦速度を介して Manning の粗度係数は 0.010 と逆算される。

各計算の上流端の境界条件には流量フラックスを与えた。この流量フラックスは、横断方向に一律に与えた。下流端の境界条件には水位を与えるものとし、実

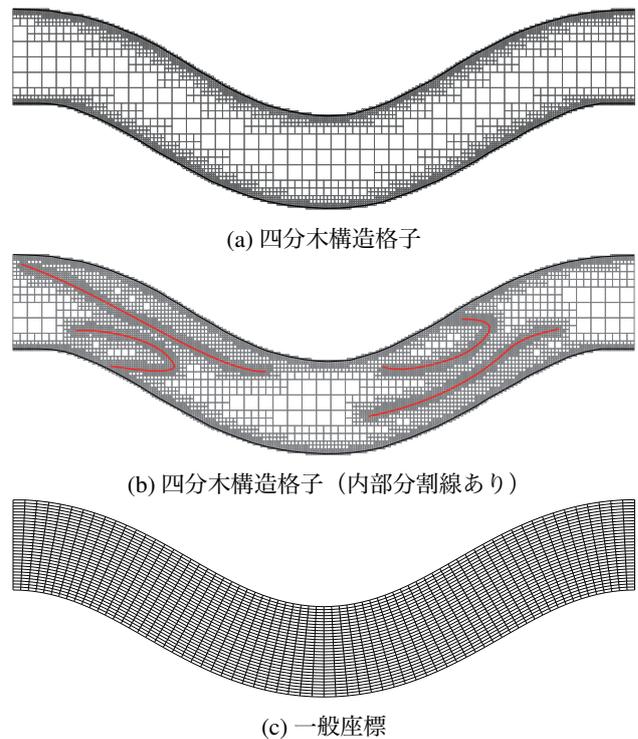


図-3 計算格子

験結果の平均水深と河床高さから規定される水位を与えた。また、水路側壁の境界条件は、ここでの流速を 0 とする non-slip 条件とした。渦動粘性係数  $\nu_t$  については、 $\kappa u_* h/6$  として求めた。ここで、 $\kappa$  はカルマン定数で 0.4 を与え、 $u_*$  は摩擦速度である。

## (4) 標高情報の生成

四分木格子に基づく格子構成は水路内の局所的な起伏を格子面積レベルを上げることで忠実に反映することが可能である。格子面積の高レベル化に伴い、各格子面積レベルでの標高情報が必要となり、水路内の起伏の忠実な反映には境界条件である高密度の面的な標高情報を要する。入力ソースが不均一な離散情報である場合は構造格子型の情報に変換する必要があり、河床形状の計算への忠実な反映には標高情報の適切な補間が必須である。

今回対象とした水理実験の河床高は横断軸に沿った計測結果を基に作成された等高線情報しか残存しておらず、この不均一な離散情報から河床形状を忠実に反映した構造格子型の標高情報を復元した。以下にその手順を示す。

初めに (1) 等水深線上の座標をデジタイズにより求め、(2) そこで得られた離散情報を最近傍法 (Nearest Neighbor)、逆距離荷重法 (Inverse Distance Weighted) の両者を組み合わせることにより、構造格子型の情報へと変換する。ただし、この補間法の特徴として入力値の影響を強く受け、補間結果の標高情報が等高線近傍で平坦になることがある。このため、(3) 等高線近傍では 3

次スプライン補間の一種である CIP 法により、平坦化した標高の起伏を復元し、全体に滑らかに連続するように再度補間した。これらの標高情報を四分木格子の各格子面積レベルごとに与えた。

### (5) 再現計算の結果

実験値および平面形状の高解像化を行った四分木構造格子、内部分割線を導入し、平面形状と鉛直起伏の高解像化を行った四分木構造格子、一般座標の定常状態に達した計算結果を流線、流速、水深を図-4,6,7 に示した。ただし、水深分布の実測値の情報が不明であるため水深に関しては計算結果のみを示した。

#### a) 流線

流線の実験値および計算結果を図-4 に示した。図-4 (a) に示した実験値から得られた流線には図中の (A) から (D) に示す以下の特徴がある。(A) 上流右岸の砂州を迂回する流れ、(B) 曲長部左岸側への流れの集中、(C) 曲頂部で通水幅が広がり、下流では右岸に沿う流れ、(D) 下流左岸の砂州を迂回する流れ、以上の4つである。特に (B) は、流路の最短距離を流れようとするこの実験条件における大きな特徴である。

図-4 に示した実験値と計算結果を比較する。流線を比較するとどれも傾向は一致しており、流況を概ね再現していることがわかる。細部に着目すると (A) および (D) の砂州を迂回する流れはどの計算においても確認できるものの、受けている砂州の影響の度合いには違いが見取れる。特に (d) の結果は砂州の影響を過大に評価していることがわかる。また、(b) と (c) では同様の計算法にも関わらず、砂州の影響が (c) の方が大きくなる興味深い結果が得られた。この結果については次節で詳述する。(B) の流れはどの計算も左岸に寄る傾向を同程度に示している。(C) の流れはどれも右岸に寄る傾向を示すが、四分木構造格子では実験値よりも流れの外岸への集中が大きく表現されており、一般座標のほうが再現性が高いと判断できる。

#### b) 流速

図-5 に青色で示した右岸側縦断軸  $j = 3$ 、左岸側縦断軸  $j = 8$  に沿った流速分布を求めた。図-6 は  $j = 3, 8$  上における流速値、 $x$  方向および  $y$  方向の流速値を示している。実測値の流速値は赤色の点で示した流速の実測地点の値を用いた。一般座標における流速値は計算点が空間的に  $j = 3, 8$  に重なることから計算結果をそのまま用いた。四分木における流速値は観測点と計算点が異なることから計算結果を全て最小格子上に置き換え、最小格子ベースでの面積補間により算出した。

図-6 a) の  $j = 3$  での流速はどの計算結果も概ね良好に実験値を再現している。特に上流から 50~200cm の区間では四分木構造格子での計算結果が一般座標と比べより実測値に近いことがわかる。

また、上流部での流速はどの計算においても多少の相違が見られるが、これは上流端で与えた流量フラッ

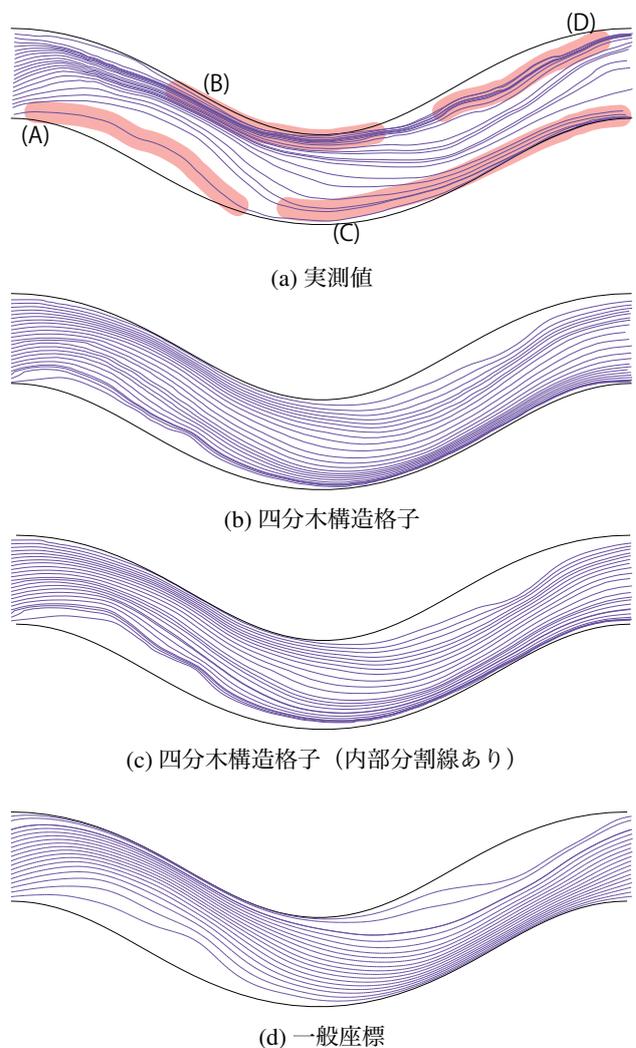


図-4 実測値と計算結果 (流線)

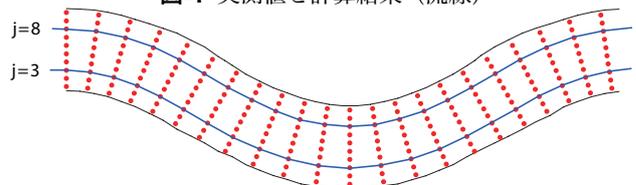


図-5 流速の評価点

クの境界条件の横断的な分布が実験と異なったことに原因があると考えられる。今回の計算においては上流端流量の横断分布は実測値が存在しないことから流量の横断分布は一様とした。

図-6 b) の  $j = 8$  での流速は  $y$  方向の流速の計算結果はいずれも再現性が高い。流速と  $x$  方向流速はいずれの計算も縦断的に平均化した流速は概ね等しいが、実測値は上流から 100cm の地点でピークを迎えるものの四分木構造格子における計算結果はピークが上流から 150cm 付近にあり、空間的な流速分布のずれが生じていると判断できる。

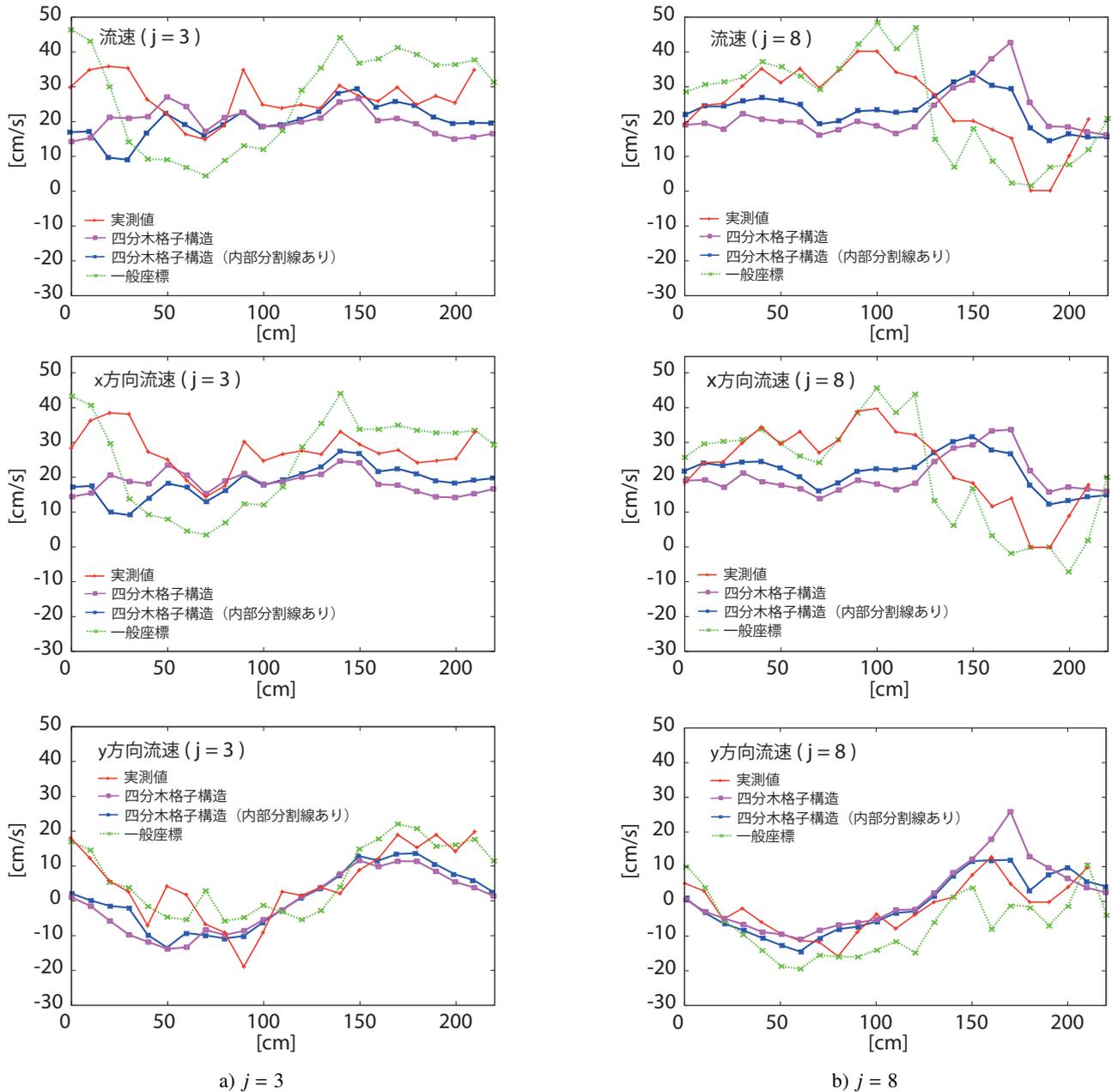


図-6 流速成分の比較

また、内部分割線を導入した四分木構造格子の計算の方が内部分割線のない計算と比べ、より実験値を良好に再現しており、特に砂州を迂回した後の流れである  $j = 8$  の上流から 150~200cm の流速ではその違いが顕著である。

### c) 水深

計算結果の水深分布を図-7 に示す。いずれの計算結果も同様の水深分布を示し、計算結果が滑らかに連続していることが見て取れる。

以上を踏まえた全体的な四分木構造格子における計算結果は一般座標系によるものと同程度の再現性を示し、計算が妥当であることが確認できる。水深と流速は支配方程式の未知数であるため、これらの計算結果の再現性が高いということは支配方程式が適切に計算

されたことを示す。

### (6) 局所的な高解像度化の影響

図-4 (b) と図-4 (c) を比較すると、図-4 (c) は流路の内岸側に発達した砂州を迂回する流れがより明瞭に表現されている。これは図-3 (a) と比べ、図-3 (b) の格子構成がより河床の起伏を忠実に計算へと反映させていることを指し示している。また、縦断流速を比較しても内部分割線を導入したほうが全体的に再現性が高かった。つまり、河床起伏の大きい箇所においては図-3 (b) のような局所的な高解像度が計算精度の向上に必要な不可欠となる。

四分木構造では格子分割レベルと内部分割線の位置情報を任意に制御することが可能であり、図-3 (b) では

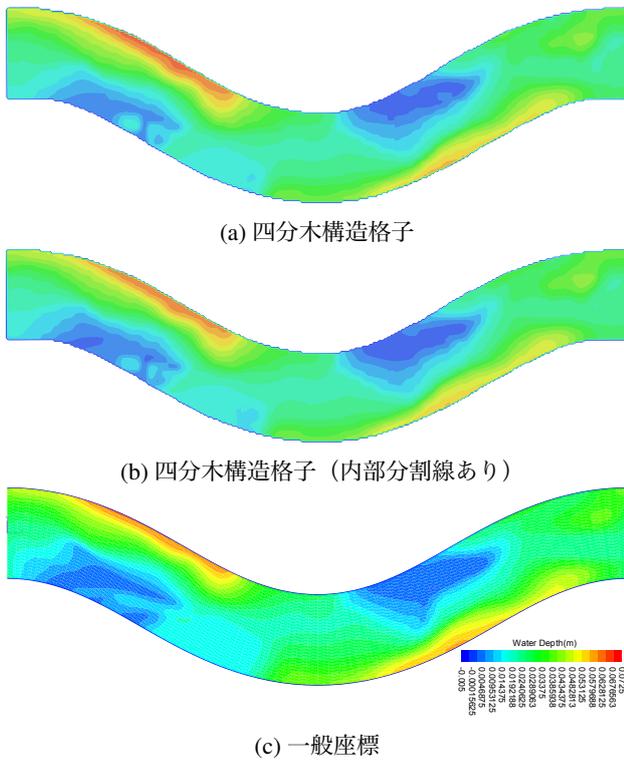


図-7 計算結果（水深）

河道内の砂州や深掘れ部の河床起伏が大きい箇所でも内部分割線を導入したが、線分に沿って分割可能なだけでなく、面的に内部分割領域を設定することも可能である。以上のことは曲線性を有する自然地形と直線性を有する人工構造物どちらの平面形状および鉛直起伏をも計算に忠実に反映できることを指し示し、これらを有する流路における有力な解析手法の一つであると考えられる。

## 5. 実河川での再現計算

前章での再現計算により実験水路スケールでの四分木構造を用いた計算の妥当性は確認された。しかしながら、実河川の平面形状は図-2のように数学関数で規定されるものではなく、前者と比べてさらに複雑な平面形状および鉛直起伏を有することが一般的である。このような複雑な地形形状および異なる計算領域スケールでの適用に関しては検討の余地が残る。そこで、本章では実河川を対象とした水理計算を行い、四分木構造格子と既存の水理計算で最も妥当性の高い手法の一つである一般座標系による計算結果を比較し、実河川スケールへの適用性を検討する。

### (1) 対象河川

計算対象は石狩川下流 27~35kp とし、洪水時の水理計算を行う。対象領域の平面形状および鉛直起伏を図-8に示す。この領域の中央部は石狩川と夕張川の合流点であり、合流部には土砂の堆積が見られ標高が高くなっ

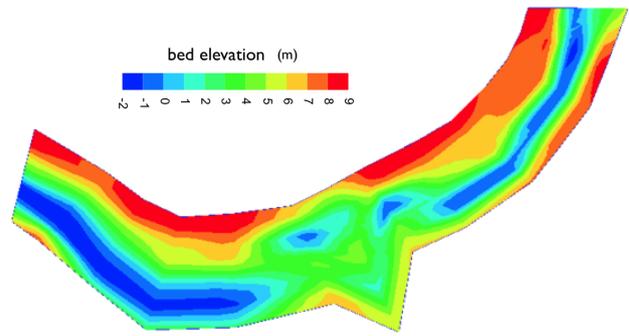
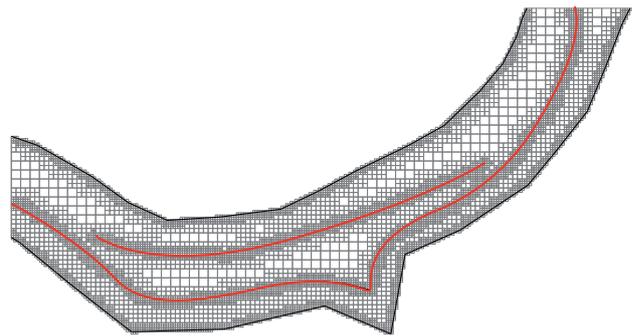
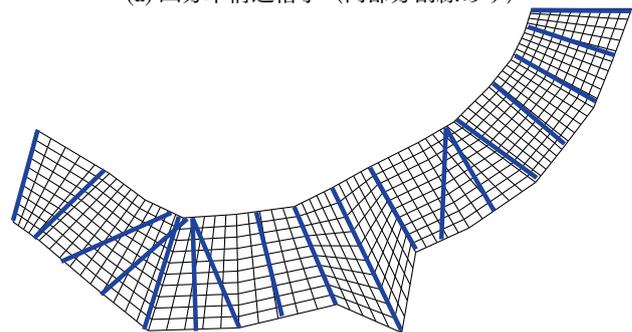


図-8 流路形状



(a) 四分木構造格子（内部分割線あり）



(b) 一般座標

図-9 計算格子

ている。このような河道内起伏の急変部を有する自然河川を対象とした。

### (2) 計算条件と計算格子

計算条件は洪水流量  $13000\text{m}^3/\text{s}$  を上流端から定常として与え、夕張川からの流入が無いように設定した。Manning の粗度係数は 0.030 とし、その他の境界条件および初期条件は前章の再現計算に用いたものと同様に設定した。

四分木構造の計算格子は辺長 100m の正方格子をレベル 0 とし、最大レベルを 2 の辺長 25m の格子を最小格子とした。また、河道内形状を忠実に反映するために河床起伏の大きい箇所を図-9(a)に赤線で示す内部分割線を導入した。格子縮減率は 76.7% であり、水路実験と同程度の空間的な計算点数の効率化がなされた。

一般座標の格子構成は図-9(b)に示すように流下方

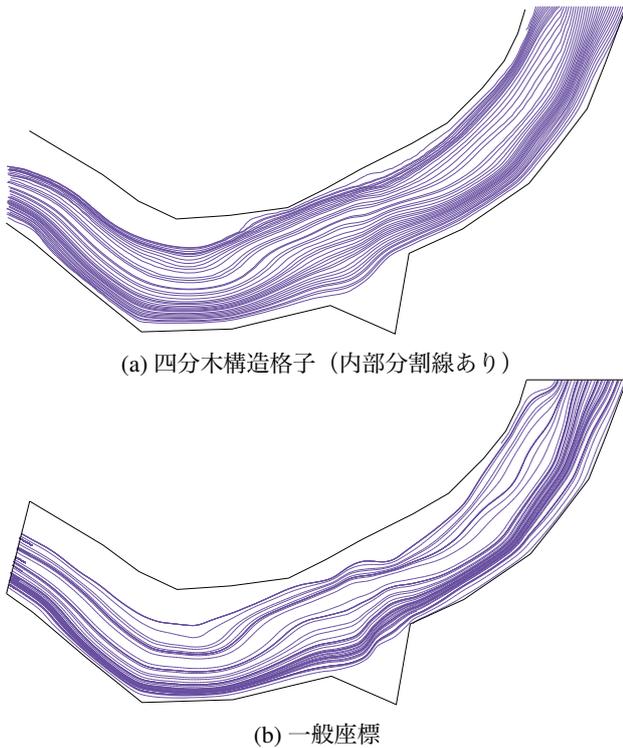


図-10 計算結果（流線）

向に 65 分割，横断方向に 10 分割し，格子辺長は概ね 100m とした．全体的には四分木構造格子のレベル 0 の格子が一般座標系の格子と同程度の大きさとなるようにした．この一般座標の格子生成に際しては図中に青線で示した横断測線の測線に基づき格子生成を行った．この横断測線を利用する格子生成法は最も直接的な手法である．しかしながら，比較的簡便に格子を生成できるものの，一般座標が要求するマトリクスの連続性を満足することの難しい格子生成法である．その結果，図-8 に示したような自然河川ではこの連続性を保つために格子生成の試行錯誤を要するのが常である．

### (3) 計算結果

四分木構造，一般座標の計算結果の流線をそれぞれ図-10 (a), (b) に示す．両者を比較すると中央部右岸で多少の相違が見られるものの，全体的には概ね一致しており，四分木構造での計算が実河川スケールにおいても妥当であると判断できる．

以上のことから自然河川のように複雑な平面および鉛直形状を有する流路に際しても四分木構造格子を導入した計算が有用であることがわかる．

## 6. 閉鎖性水域における解析

四分木構造を用いた計算格子では格子の大きさを容易に自在に設定できるため，どのように複雑な平面形状であろうと計算に反映可能となる．また，湾や湖などの閉鎖性水域における水理解析にも応用できること

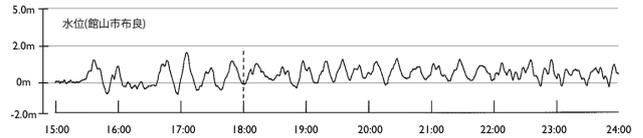


図-12 館山市布良での実測水位

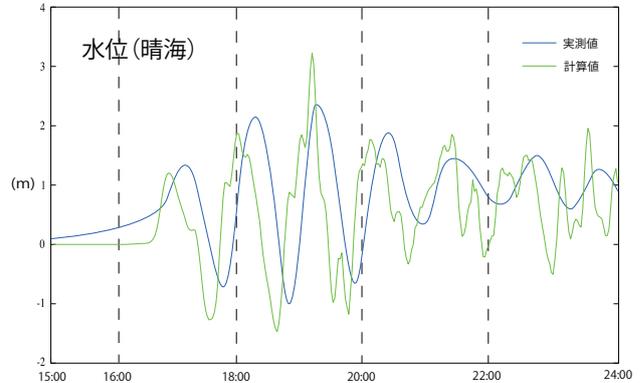


図-13 水位の時間変動

を本章で示す．ここでは東京湾を例に東日本大震災の際に観測された津波の再現計算を行った．波高の実測値は気象庁の公表データを利用した．<sup>13)</sup>

### (1) 計算格子

図-11 に東京湾の平面形状を再現した計算格子を示した．この計算格子は最大レベルを 3 に設定し，レベル 0 を辺長 1000m の正方格子とし，最小格子は辺長 125m の正方格子である．東京湾の地形は自然に形成された地形と埋立地のように人工的に造られた地形の両者を包含しており，平面形状は非常に複雑な形状を有しているが，図-11 に示すように四分木構造格子で表現可能である．

### (2) 計算条件

計算条件は図-11 の左端に図-12 に示した湾口から 10km 程度離れた千葉県館山市布良の 3 月 11 日の実測波高を境界条件として与え，計算格子の外側は不透過とした．

### (3) 計算結果

図-11 に赤色で示した東京都中央区晴海での 3 月 11 日の水位の実測値と計算値を図-13 に示す．この図からわかるように水位のピーク位置には多少のずれが生じているものの，概ねの傾向は計算により再現されている．湾の入り組んだ箇所での水位の妥当性から，四分木構造は複雑な形状を有する閉鎖性水域の計算にも適用可能であると判断できる．

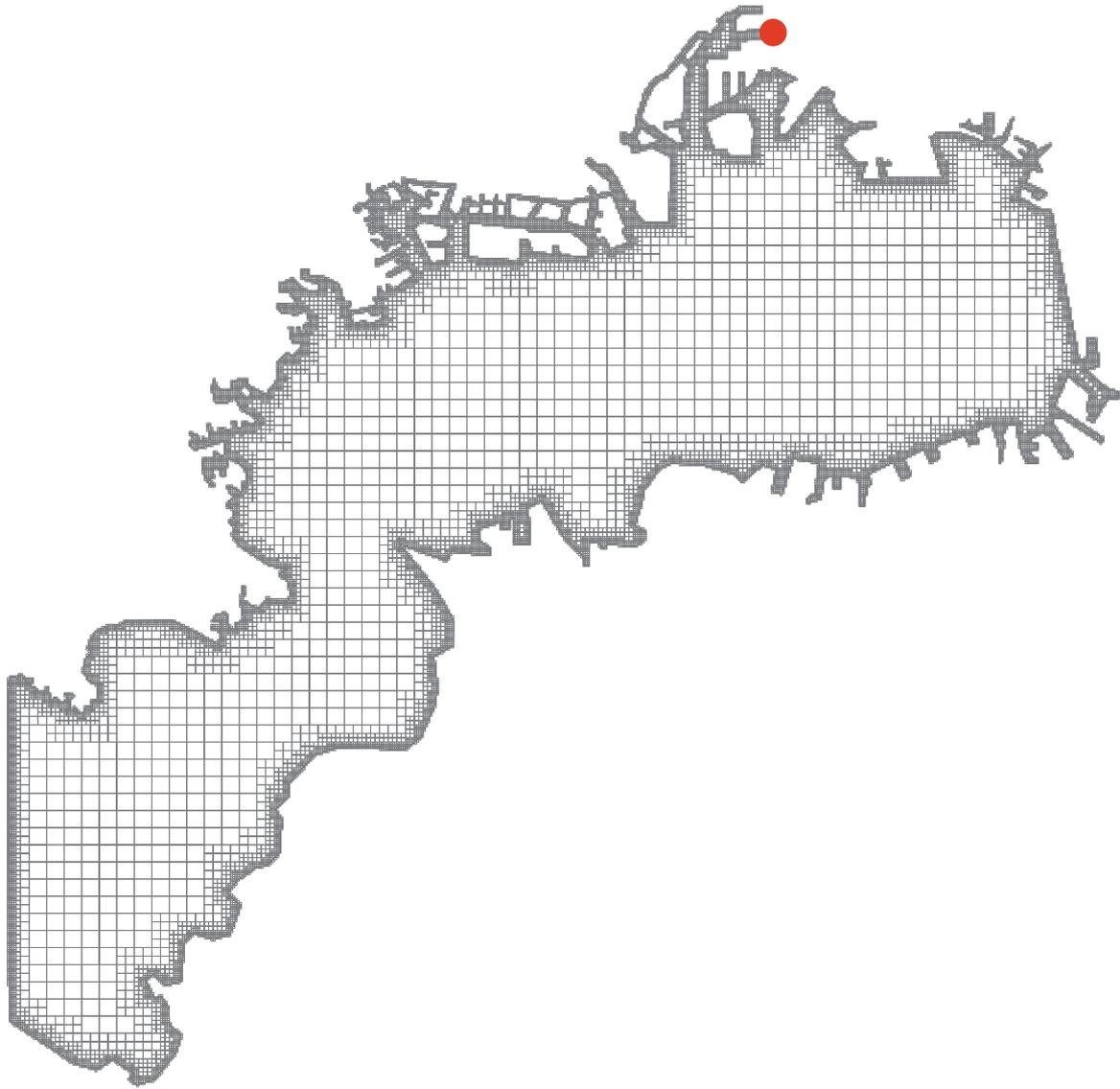


図-11 計算格子

## 7. 四分木構造格子に適する解析対象

これまでのことを踏まえると四分木構造格子と一般座標系はそれぞれ一長一短の特徴を有しており、扱う計算対象に得手不得手があることがわかる。本章ではそれらの特徴と効果的な使い分けについて示す。

一般座標における利点は平面形状を少ない格子で表現できる点である。四分木構造格子では解像度と格子数の関係の効率化は施されているものの、適切な平面形状の表現のための境界部での格子の集中は不可避であり、格子数の観点では一般座標が優位である。一方で、河道内の鉛直起伏の表現は局所的な高解像化が可能な点から四分木構造格子が優位である。また、四分木構造はマトリクスの連続性を考慮する必要がないため、いかなる平面形状であっても格子生成が容易に行えるという利点がある。

以上のことから流れの急変部を有さない流路においては計算負荷の観点から一般座標が適していると言え

る。しかしながら、一般座標では格子構成が困難な、複数河川の合流や砂州や人工構造物などの不透過領域を含む複雑な平面形状を有する流路では四分木構造格子を用いることが有効である。また、流路内に人工構造物や中洲などの流れの急変部を有する場合には局所的な高解像化が可能な四分木構造格子による計算が適していると思われる。

## 8. おわりに

本研究では四分木構造を導入した浅水流方程式の数値解析法を確立した。四分木構造は直交座標系を用いても非常に柔軟な境界適合を可能とする格子構成法であり、直交座標系を用いていることでの利点として以下の3つがある。(1) 数値計算の精度において重要となる格子の直交性が保持されること、(2) 格子の歪曲を

行わないため、方程式に付加項が不要となること、格子生成時に際しても交差角に対する配慮が不要であることから(3)格子構成を一意に決定できる。

この四分木構造格子では局所的な高解像化を容易かつ任意に実現することが可能である。この特徴は、境界形状の適合の他に流水中に存在する構造物や中州などの不透過領域の解析への反映を飛躍的に簡便な手続きで実現した。それだけにとどまらず、河床形状の急変領域などの適切かつ効率的な解析の反映も同時に約束している。このような解析密度の向上は、今後主流となると考えられる面的な標高情報の計測技術と組み合わせることで精度向上に寄与するばかりか、局所的な地形や水理状況の把握が可能となるため構造物周りの流れの把握や生物の生息場の確保などの計算結果の2次的利用においても非常に有益となると考えられる。

**謝辞:**本研究は、科研費基盤研究(A)(代表者 清水康行)、科研費基盤研究(B)(代表者 渡邊康玄)、科研費若手研究(B)(代表者 安田浩保)からの支援を受けて実施されている。ここに記して謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 清水康行：一般座標系を用いた2次元流れと河床変動の計算，土木学会年次学術講演会講演概要集第II部，No.46，pp.634-635，1991。
- 2) 内田龍彦，河原能久：二次元浅水流の保存型CIP陽解法の開発とその検証，応用力学論文集，Vol.9，pp.917-924，

- 2006。
- 3) 安田 浩保・清水康行：座標軸非依存の部分境界適合法による蛇行流路の数値計算，土木学会水工学論文集，第52巻，pp.1003-1008，2008。
- 4) 前野詩朗，小川信：非構造格子有限体積法による水理構造物周辺流れの数値解析，応用力学論文集，Vol.6，pp.857-864，2003。
- 5) 秋山壽一郎，重枝未玲，浦 勝：非構造格子を用いた有限体積法に基づく1次および2次精度平面2次元洪水数値モデル，土木学会論文集，No.705/II-59，pp.31-43，2002。
- 6) Cruz, S.： Numerical solution of the shallow water equations on quadtree grids. DPhil thesis, Oxford University, UK, 1997.
- 7) 渡部靖憲，小玉努：Adaptive Mesh Refinementによる高解像津波シミュレーション，海洋開発論文集，第25号，2009。
- 8) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学博士論文，184p.，1984。
- 9) 長谷川和義，山岡勲，田中直人：蛇行蛇行の影響を受けた河床波の形状特性，土木学会北海道支部論文報告集第II部，第38号，1982。
- 10) 長谷川和義，山岡勲，鈴木康正：蛇行流路における河床波上の流れ，土木学会北海道支部論文報告集第II部，第38号，1982。
- 11) 河川シミュレーション支援ソフト【RIC-Nays】<http://i-ric.org/nays/ja/index.html>
- 12) 黒木幹男，岸力，板倉忠興：交互砂州の水理特性，沖積河川における河床形態と流体抵抗の研究，1975。
- 13) 気象庁「平成23年(2011年)東北地方太平洋沖地震」について

(2011.7.31 受付)