

# 一般座標の格子構成が有する打切り誤差の 理論的評価とその最適化手法

STUDY ON IMPORTANCE OF OPTIMIZED GRID STRUCTURE  
IN GENERAL COORDINATE SYSTEM

安田 浩保<sup>1</sup>・星野 剛<sup>2</sup>

Hiroyasu YASUDA and Tsuyoshi HOSHINO

<sup>1</sup> 正会員 工博 新潟大学准教授 災害・復興科学研究所 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

<sup>2</sup> 学生員 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

Numerical computation of river flows have been employed the general coordinate system to adjust a river plane form. An adjustment flexibility of the coordinate system is better but it is difficult to generate a grid system in order to compute stably because grid system is not determined uniquely. This study develops a new boundary fitting method introducing the hierarchical quad-tree grid system for computation of confluence and bifurcation in natural rivers. The numerical model with the quad-tree grid system apply to compute flow pattern in experiment flume and in natural river with bifurcation and confluence, the computed results agree with measured result of the flume and natural river well.

**Key Words:** *truncation error, metric, general curvilinear coordinate system, numerical grid generation*

## 1. はじめに

境界適合に一般座標を導入した河川の流況や河床変動の解析法は、格子構成の自由度の高さから解析対象の範囲の飛躍的な拡張に多大な貢献を果たしてきた。

この数値解析法は、精密な物理モデルと適切な格子構成が一对となつてはじめて性能が最大化される。物理モデルとしての研究はこれまでに高精度の差分スキームを導入したり高次の物理項を導入したりなどを中心に行われてきた。また、対になる格子の生成法はいくつか提案されてきた。しかし、物理モデルと格子生成法の交点である、格子構成の良否と解の応答特性については、数値解析の信頼性に根幹的な影響を及ぼすにもかかわらずほとんど研究されていない。両者の関心が十分に交わることなく現在に至り、学問的な空白域のままとなっている。

一般座標を導入した幾何学形状の境界適合においては無限の格子構成のパターンが原理的に存在する。これらのうち歪曲が大きな格子構成ではたとえ数値的な水理計算をどれだけ厳密に行っても水理の支配方程式を満たす解を得られない。これは、支配方程式の差分計算と同様、座標変換のメトリックスの差分計算もまた Taylor 展開に由来する打切り誤差を不可避のためである。直交格子では 0 となるメトリックスの絶対値は、格子の歪曲が大きくなるにしたがって増加する。したがって、一般座標による境界適合の効果がもっとも発

揮される複雑な幾何学形状ほどメトリックスは打切り誤差の影響を受け易い。そのうえ、メトリックスが大きいう、格子間隔の不規則性が大きな格子構成ならば、そこから得られる数値解には水理の支配方程式と格子構成に由来する 2 つの打切り誤差が混在し、その帰結としてクーラン数と無関係な計算不安定に見舞われたり、方程式を満足しない解を得ることになる。

メトリックスの打切り誤差は、高次の差分近似を導入するか、あるいは低次の差分近似でも正確に表せるようにメトリックスをできるだけ小さくしかも滑らかに連続分布させた格子構成ならば緩和ないしは解消できることは明白である。連続的に滑らかな格子の数学的な生成法は、Thompson ら<sup>1)</sup>により体系化されたことはよく知られた事実である。しかし、彼らのものをはじめとする格子生成法が打切り誤差の緩和にいかなる効果をもたらすかは、少なくとも水工学においてこれまでに論じられたことはないようである。著者らは、このために、Thompson らなどの格子構成法が有効に活用されず、例えば河川の流況解析では格子構成の理論的条件から乖離した格子構成が散見される実状に繋がっていると考えている。

格子構成の打切り誤差がもたらす工学的な問題の本質は、境界適合を導入しなければ解けない複雑な形状の領域においてこそ顕在化するために理論的検証が困難なうえ、同じ水理条件を与えても格子構成ごとに解が異なつて一意に決定されないことである。

本研究では、一般座標の格子構成が内包する打切り誤差を定量的に算定するとともに、このような誤差の緩和に対して既存の格子生成法がもたらす効果について論じる。

## 2. メトリックスの打切り誤差

まず簡単のため1次元の座標変換

$$f_x = \frac{f_\xi}{x_\xi} \quad (1)$$

が行われたときの関数値  $f$  の1階の微分の差分計算を考える。ここで、 $x$  は物理面の座標、 $\xi$  は計算面の座標である。計算面の離散間隔を1として  $(i, j)$  の中央差分を考えると

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (2)$$

なる差分式を得る。

この式を Taylor 展開と対比すると、明らかに  $f_x$  が近似的に計算されているだけで  $f_{xx}$  より高次の項を完全に無視した計算に等しいことが分かる。 $f_{xx}$  より高次の項は、 $f$  の勾配が大きかったり離散間隔が広く設定されている場合に重要な役割を果たし、このような条件のもとでは解析結果に対して打切り誤差として少なからずの役割を果たす。

ここで、 $f_{i+1}, f_{i-1}$  を Taylor 展開したのちに式 (2) に代入すると打切り誤差として

$$T = -\frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{xx} - \frac{1}{6}x_{\xi\xi}^2f_{xxx} + O(\Delta\xi^4) \quad (3)$$

が得られる。右辺の第1項は格子間隔が不規則の場合に現れるものである。誤差を集中させる負の拡散項の形式となっているから格子間隔を不用意に増減させることが得策でないことが分かる。

2次元における1階の微係数の一般座標変換は周知のとおり

$$f_x = \frac{1}{J} [y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta] \quad (4)$$

$$f_y = \frac{1}{J} [-x_\eta f_\xi + x_\xi f_\eta] \quad (5)$$

のように与えられる。ここで、 $x, y$  は物理面の座標、 $\xi, \eta$  は計算面の座標、両者の間には  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ 、また  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  の対応関係があるものとする。 $J$  は変換のヤコビアンで  $x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  である。

$f_\eta, f_\xi$  をそれぞれ Taylor 展開し、式 (4)、(5) に代入すると

$$\begin{aligned} T_x = \frac{1}{2J} & [(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - y_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) f_{xx} \\ & + (y_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) f_{yy} \\ & + \{y_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) \\ & - y_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\} f_{xy}] + O(\Delta\xi^3) \quad (6) \end{aligned}$$

表-1 メトリックスの幾何学的な意味

$x_\xi, y_\eta$	格子の存在。 $x_\xi, y_\eta \neq 0$ なら格子が成立。
$x_{\xi\xi}, y_{\eta\eta}$	格子の分布間隔の均一度。等間隔なら0。
$x_\eta, y_\xi$	格子の直交性。直交格子なら0。
$x_{\eta\eta}, y_{\xi\xi}$	格子分布の曲率。一様斜行なら0。
$x_{\xi\eta}, y_{\xi\eta}$	格子辺の平行性。平行格子なら0。

$$\begin{aligned} T_y = \frac{1}{2J} & [(-x_\xi x_\eta x_{\eta\eta} + x_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) f_{xx} \\ & + (-x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} + x_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) f_{yy} \\ & + \{-x_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) \\ & + x_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\} f_{xy}] + O(\Delta\xi^3) \quad (7) \end{aligned}$$

が得られる<sup>1)</sup>。ここで、 $T_x, T_y$  はそれぞれ式 (4)、(5) が内包する打切り誤差である。

これらの打切り誤差は合計で10個のメトリックスから構成される。これらのそれぞれの幾何学的な意味は表-1にまとめたとおりで、 $x_\xi, y_\eta$  を除き正方直交格子ならすべて0となることは自明である。例えば、 $x_{\xi\xi}, y_{\eta\eta}$  は計算点  $(i, j)$  においては、

$$x_{\xi\xi} = x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j} \quad (8)$$

と書けるから、等間隔の格子構成なら相殺される。

## 3. 格子構成の最適化手法

実河川の幾何学形状を一般座標により境界適合する場合、河道測量の際に設定された測線を基準にした格子構成が一般的な方法となっているようである。本章では、測量測線を基準として生成された格子構成のメトリックスの打切り誤差を抑制するように格子構成を最適化する手法について述べる。

### (1) 楕円型偏微分方程式に基づく最適化手法

一般座標の計算格子は座標軸同士の交差角が大きく滑らかに変形する歪曲が小さい格子が定性的には望ましいとされている。本研究では、このような条件を満たすさまざまな格子生成法のうち、楕円型の偏微分方程式に基づく格子生成法を測量測線を基準とした格子構成の数学的な最適化手法として採用する。

Thompson ら<sup>2)</sup> は楕円型の偏微分方程式を境界値問題として解くことで数学的に適当な格子を生成する手法を提案している。支配方程式は

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (9)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (10)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (11)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (12)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (13)$$

である。

この方法では、係数を通して2本の偏微分方程式を結びつけられているため、 $x$ と $y$ が相互に作用し合う解が得られる。式(9)と(10)の楕円型の偏微分方程式は適当な初期条件を与えて収束計算を行うことで解が得られる。

本章の目的である数学的に最適化された格子構成を得るためには、初期条件に測線を基準として作られた格子構成の平面座標、境界条件に境界適合の対象となる格子端の座標を与えればよい。

## (2) 境界条件の幾何学的な修正法

前項に示した楕円型の偏微分方程式に基づく格子生成法は境界値問題として解かれ、解析領域の内部の値のみが支配方程式に応じて決定される。前節の最適化手法が効果を発揮し、メトリックスが小さい格子構成を得るためには適切な境界条件が与えられている必要がある。

表-1に整理したように、 $x_{\xi}, y_{\eta}$ 以外のいずれともができるだけ0に近ければ、いわゆる滑らかで座標軸の交差角が大きな歪曲が小さい格子構成が得られる。ここで、この様な条件に近い格子構成として平行四辺形で構成されるものを考えると、式(6)は

$$T_x = -\frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{xx} + \frac{1}{2}(y_{\eta\eta}f_{yy} - x_{\xi\xi}f_{xy}) \cot \theta \quad (14)$$

と簡略化される。格子の分布間隔と直交性にかかわるメトリックスだけの式になり、 $\theta$ が $45^\circ$ 以上なら非直交性がもたらす打ち切り誤差は大きくないことが分かる。つまり、格子構成においては特に格子の分布間隔に留意を払う必要がある。このためには、境界条件が境界線分に座標値が等間隔に配置されることが要求される。

測線に基づく格子構成では境界上の座標値は不等間隔であることは容易に想像される。そこで、

$$L = n \times l \quad (15)$$

の関係を満たすように境界上の座標値を再配置する修正を導入する。ここで、 $L$ は境界の全体長、 $l$ は分割間隔長、 $n$ は分割数である。この境界条件の修正により、格子の分布間隔が領域の全体で均一化されるように式(9)と(10)が解かれることが期待できる。

## 4. 水理の数値モデル

以下で実施した水理計算はiRICに同梱される平面2次元ソルバーであるNays2Dを用いた。このソルバーの基礎式を以下に示す。流れの支配方程式は、水深方向に積分された流速を用いる以下に示す浅水方程式

である。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -hg \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + D^x \quad (16)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -hg \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + D^y \quad (17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\tau_x}{\rho} = C_d u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (19)$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = C_d v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (20)$$

$$D^x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial y} \right) \quad (21)$$

$$D^y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right) \quad (22)$$

式(2)(3)はデカルト座標系 $(x, y)$ における2次元浅水方程式を表しており、また式(4)はデカルト座標系における流れの連続の式を表している。ここで、 $u$ は $x$ 方向流速、 $v$ は $y$ 方向流速、 $h$ は水深、 $H$ は水位、 $g$ は重力加速度、 $\rho$ は流体密度、 $\tau_x$ は $x$ 方向底面剪断力、 $\tau_y$ は $y$ 方向底面剪断力、 $\nu_t$ は動粘性係数を表す。ただし、以下に実施した数値計算では上式を一般座標系に変換したものをを用いている。

## 5. 実河川における数値実験

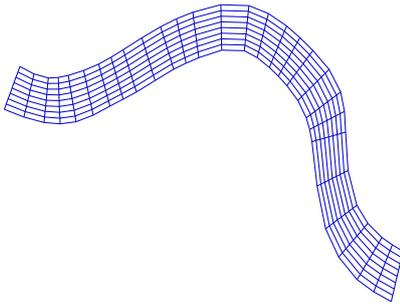
本章では実河川の蛇行部を対象にして様々な一般座標の格子構成、そのメトリックスの打ち切り誤差の空間分布、さらにそのような格子を用いた際の解の安定性について論じる。

### (1) 実験条件

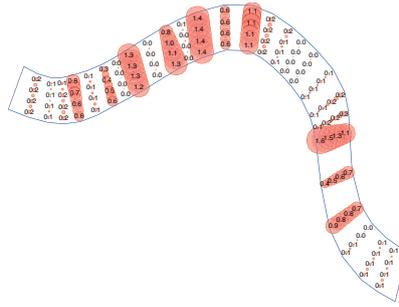
実験の対象とした河川は新潟県三条市を貫流する五十嵐川とし、水理量には2011年の新潟福島豪雨の際の最大水位時の値を境界条件とした。

格子構成は全部で7つを準備した。図-1中の(a)が測量測線に基づく格子構成、(b)が流下方向軸と横断方向軸をできるだけ直交するように手作業で修正した格子構成、(c)が(a)に対して楕円型の偏微分方程式による最適化を実施した格子構成、(d)が境界上の座標値を等配分した上で楕円型最適化した格子構成、(e)が(a)の縦断方向の分割数を2倍にした格子構成である。このほかに(e)の楕円型最適化、(e)の境界上の座標値を等配分した上で楕円型最適化を施した格子構成も準備したが紙面の関係で掲載は割愛する。

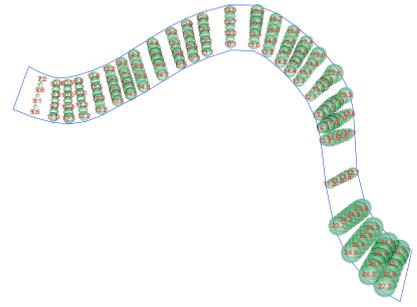
i) 格子構成



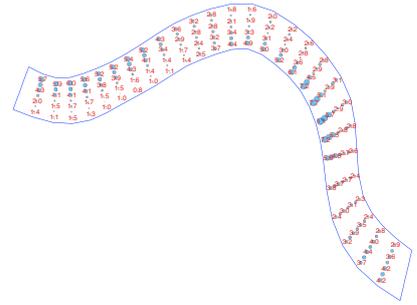
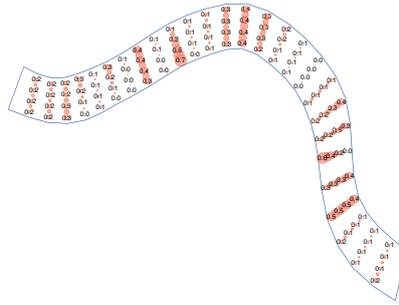
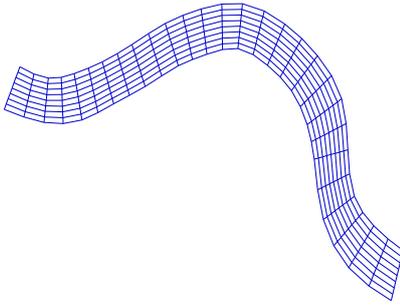
ii) メトリックスの打切り誤差



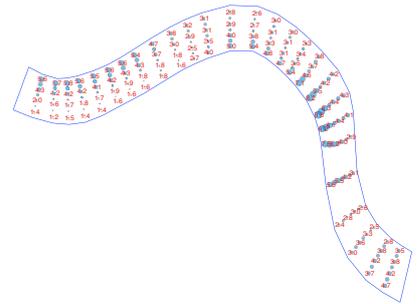
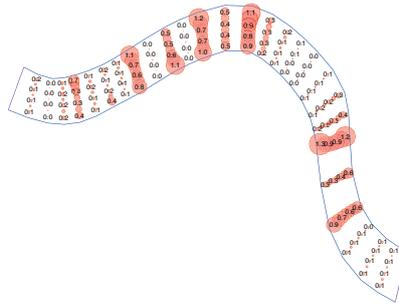
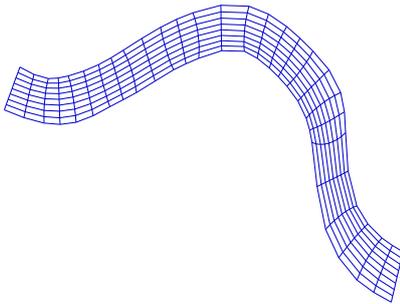
iii) 累積水位変動量



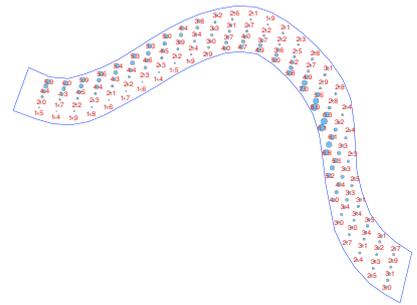
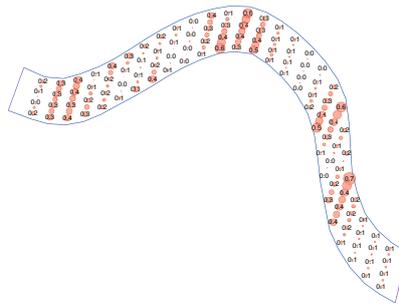
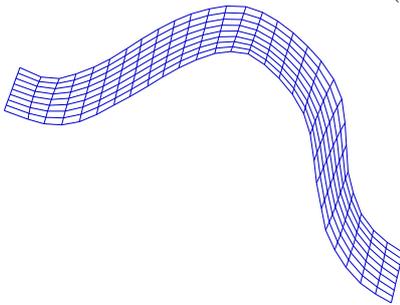
(a) 格子構成 1 (測量測線に基づく格子構成)



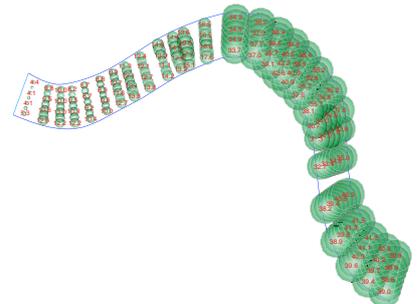
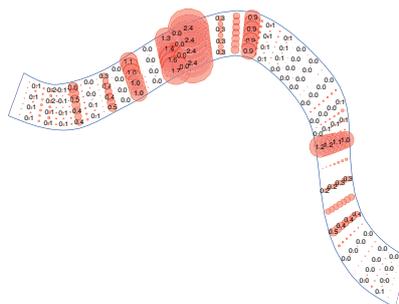
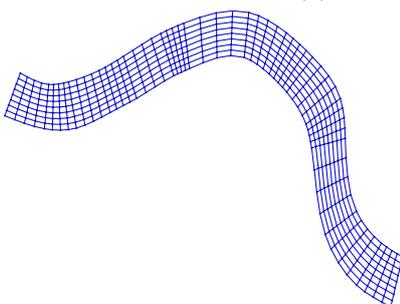
(b) 格子構成 1-0 (経験に基づく手動による最適化)



(c) 格子構成 1-1 (楕円型方程式による最適化)



(d) 格子構成 1-2 (楕円型方程式による最適化と境界値の等配分)



(e) 格子構成 2 (測量測線に基づく格子構成：縦断方向 2 倍)

図-1 格子構成、メトリックスの打切り誤差、解の安定性

## (2) 実験結果

### a) メトリックの打切り誤差の空間分布

本研究では、 $T_x, T_y$  の  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$  を定数扱いとした、

$$T_x = \frac{1}{2J} [(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - y_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) + (y_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) + \{y_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) - y_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\}] \quad (23)$$

$$T_y = \frac{1}{2J} [(-x_\xi x_\eta x_{\eta\eta} + x_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) + (-x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} + x_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) + \{-x_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) + x_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\}] \quad (24)$$

これらの式から、メトリックの打切り誤差の空間分布を求めることを試みる。

5つの格子構成のそれぞれのメトリックスの打切り誤差の空間分布は図-1の各行の中央に示したとおりである。図中の数値と褐色に着色された円形により各格子点におけるメトリックスの打切り誤差の合計値  $T_{xy}$  を示した。 $T_{xy}$  は

$$T_{xy}(i, j) = \frac{1}{\Delta S} (T_x(i, j) + T_y(i, j)) \quad (25)$$

として求めた。ここで  $\Delta S$  は計算領域内のすべての  $\Delta x, \Delta y$  の平均値である。

図-1(a)の格子構成は縦断方向の格子の配置間隔が不規則で、式(8)から予見されるとおり、この様な格子点においてはメトリックスの打切り誤差がそれ以外の地点に比べて格段に大きくなっていることがよくわかる。同図(b)の格子構成は縦断方向の格子をできるだけ均一に配置したもので、計算格子の全体で打切り誤差が(a)と比べると格段に減少していることが分かる。同図(c)と(d)は(a)に対して数学的な格子生成法を応用して最適化を行ったものである。(c)は縦断方向の境界上の格子間隔は(a)と同じながらも計算格子の内部の格子間隔については変更が加えられ、その結果、(a)と比べると打切り誤差が減少していることが分かる。また(d)は格子の境界座標を等配置としたうえで最適化を行ったもので、格子全体で大幅に打切り誤差が減少していることが分かる。(e)は(a)の格子構成を基本として縦断方向の格子間隔を半分にしたものである。上記までの5つの格子構成の中でもっとも打切り誤差が大きい結果となった。

### b) 打切り誤差と数値計算の安定性

5つの格子構成のそれぞれに最大水位時の水理量を与えて定常解を求める数値計算を行った。結果としては、数値計算を開始して直ちに定常解が得られる格子構成と計算終了時刻の3600秒の時点においても計算領域の全体の水理量が波動現象のように大きく変動を続けるものに大別される結果を得た。計算の安定性を図-1の

各行の右列に示した。図中の数値と褐色に着色された円形により各格子点における計算された水位変動量の累積とを示した。この水位変動量の累積値は、

$$\delta H(i, j) = \int \frac{H(i, j)}{H_0(i, j)} dt \quad (26)$$

として求めた。ここで  $H_0$  は図-1(b)から得られた計算終了時刻の水位で、定常解として採用した。

図-1(a)から(e)の格子構成のうち定常解を得ることができたのは(b)、(c)、(d)で、計算終了時刻においても定常に達することがなかったのは(a)、(e)である。メトリックスの打切り誤差と累積水位変動量と結びつけるように図-1の全体を俯瞰すると、メトリックスの打切り誤差が大きい格子構成では累積水位変動量も大きく、定常解を得ることができないことがわかる。このうち(e)については計算格子の全体としては縦断方向に細分化されているものの、分割間隔が不連続となつて(a)と比べて打切り誤差と累積水位変動量の両者が大きくなっている。

以上までに得られた結果をまとめると、式(25)に示した打切り誤差の評価を用いれば、格子構成毎の計算の安定性を水理計算を実施することなくあらかじめ推定できることが分かる。

## 6. おわりに

一般座標は理論的には完璧に写像できることは周知の事実である。本論文で取り上げたメトリックスの打切り誤差は言うまでもなく数値解析に特有の問題である。

本研究を通し、適当な解を得るために一般座標による境界適合をしても格子構成が適当でなければ支配方程式を満足する解を得られないことが定量的に確認された。一般座標の格子構成は無数の自由度を原理的には有するが、数値計算においてはメトリックスの計算における打切り誤差を排除できない限りは数学的な拘束条件の下で生成された格子構成を採用することが望ましい。

現在、広く散見される実河川の格子構成である河道測量の横断測線を基準とした格子構成は一般座標有する本来の自由度を十分に発揮しているとは言えない。実河川の境界適合に一般座標を適用するならば、本研究で示したように、何らかの最適化を行い、一般座標が有する幅広い自由度を発揮させる必要がある。

また、メトリックスの打切り誤差を応用することで、格子構成毎の計算の安定性を水理計算を実施することなくあらかじめ理論的に推定できることを示した。

**謝辞:** 本研究は、科研費若手研究(A)(代表者 安田浩保)および科研費基盤研究(B)(代表者 渡邊康玄)からの支援を受けて実施されている。ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi and C. Wayne Mastin, Numerical Grid Generation Foundations and Applications, [www.hpc.msstate.edu/publications/gridbook/](http://www.hpc.msstate.edu/publications/gridbook/).
- 2) Thompson, J. F.; Mastin, C. W.; Thames, F. C., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear

coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, doi:10.1016/0021-9991(74)90114-4, *J Comput Phys*, pp. 299-319, 1974.

**(2012.8.31 受付)**